令和2年度共同利用研究報告書

2021年06月29日

九州大学　マス・フォア・インダストリ研究所長 殿

所属・職名 京都大学大学院理学研究科・准教授

稲生 啓行

下記の通り共同研究の報告をいたします。

記

		整理番号	20200016	
1.研究計画題目	VRを用いたインタラクティブな高次元認識			
2.新規・継続	新規			
3.種別	一般研究			
4.種目	短期共同研究			
5.研究代表者	氏名	稲生 啓行		
	所属部局名	京都大学大学院理学研究科	職名	准教授
6.研究実施期間	2021年02月08日(月曜日)〜2021年02月12日(金曜日)			
7.キーワード	4次元可視化、ヴァーチャル・リアリティ、視差			
8.参加者人数	65人			

9.本研究で得られた成果の概要

近年バーチャル・リアリティ(VR)技術の発展は目覚ましいが，その数学への応用はまだ極めて少ない．VRを利用すると，3次元的な対象を今までにない現実感・没入感を持って表現し，観察することができる．その為数学においても教育・研究その他様々な応用が期待される．この研究では，代表者らの研究対象である複素力学系から現れる複素2次元のフラクタル集合を観察し，構造を理解することを長期的な最終目標としている．その為まずは超立方体などの(比較的)簡単な4次元の対象をVR空間に可視化し，それをインタラクティブに操作できるようにすること，またそれが4次元的な構造の把握に貢献していることを示す為の心理実験を行うことを当面の目的とし，色々な可視化方法の実装・比較や，心理実験の計画を行うこととした．

またこの研究の促進と，数学界におけるVR技術の普及・発展のために公開ワークショップを開き，3次元・4次元的な数学の対象の可視化やVRに関係する講演を行った．4日間のワークショップには毎日30弱〜40弱の参加があり，活発な意見交換も行われた．

実際に実装する上では，可視化の方法も複数の方法が考えられるし，操作，特に4次元の回転方法は既存のものだけでもいくつか存在する．それらを実際に実装し，また個々の共同研究者の環境で実行できるようにして色々試せるようにした．できるだけ近いうちに心理実験を行うべく，どの実装を採用し，どのような物体で，どのようなテストをするかを現在も継続して議論している．

2020 年度 九州大学 IMI 共同利用・短期共同研究
「VR を用いたインタラクティブな高次元認識」報告書

稲生 啓行 (京都大学大学院理学研究科)

1　はじめに

本稿は，2021 年 2 月 8 日 (月) から 12 日 (金) に開催された短期共同研究「VR を用いたインタラクティブな高次元認識」の報告書である．近年，仮想現実 (バーチャル・リアリティ，VR) の技術は，計算機の高性能化と安価なヘッドマウントディスプレイ (HMD) 型機器の登場により急激に発展している．これによって，圧倒的な現実感・没入感で 3 次元的な対象を観察・操作できるようになった．しかしながら，数学や物理，データ分析などの分野においては，4 次元もしくはそれ以上の高次元的な対象がしばしば現れる．この研究の目的は，VR 空間に 4 次元の対象をリアルタイムに可視化し，ユーザが動きまわってそれを観察し，操作できるようにすることで，インタラクティブに 4 次元 (またはそれ以上) の対象を感覚的に理解することである．

4 次元の対象には，超立方体などの正多胞体，クラインの壺や射影平面などの 3 次元ユークリッド空間には埋め込めない曲面の 4 次元空間への埋め込み，複素力学系などに現れる，複素 2 次元空間内のフラクタル集合のように，簡単なものから複雑なものまで様々なものがある．このような数学的・抽象的なアイディアや複雑なデータなどを実際に自分の目で観察することは，それらを理解する上での大きな助けとなる．教育においては人々の理解を深め，研究においては新しい構造や新しい現象を発見できるかもしれない．その為のインタラクティブな可視化環境を，VR 機器を用いて実装する試みが少しずつ行われはじめている．

しかしながら，3 次元空間に生活する我々にとって，実際に 4 次元的な対象を可視化して理解することは簡単ではない．従って，簡単なものから少しずつ理解を深めていく必要があるだろうと考えられる．この共同研究では，現在の 4 次元可視化とインタラクション，またそれに関連する VR や 3 次元コンピュータグラフィックス (3D CG) を用いた数学的対象その他の可視化に関する技術・研究に関する情報を共有し，よりよい実装方法や，段階的に 4 次元 (または高次元) の認識を深めていくためのチュートリアルの作成などについて議論を行った．最終的には VR によるインタラクティブな可視化が，実際に高次元認識に貢献しているかどうかを実証するための心理実験を行うことを目標としており，その設計や VR 可視化を用いたテストの実装なども行い，現在も進行中である．

2　研究の背景

複素力学系の研究においては，Mandelbrot 集合や Julia 集合といった複雑なフラクタル集合が自然に現れる．これらは複素 1 次元，つまり実 2 次元の平面上の集合なので，簡単に計算機で絵を描画することができる．しかし次元が上がって複素 2 次元になると，これは実 4 次元なので，これを描くことは困難である．宇敷 [3] は 2007 年頃には既に Biham–Wenzel の方法を用いて複素 Hénon 写像の Julia 集合を描くソフトを開発し

ていた．2013 年に HMD 型の VR 機器である Oculus Rift の開発キットが手に入るようになると，宇敷と稲生はこれらの Julia 集合を VR で見るソフトの開発を始めた．その後 2016 年頃から一般向けの VR 機器が急速に普及し，性能も格段に向上して，より高い没入感で，精細な画像を表示し，それを操作することが可能になった．また開発環境も整備され，VR 機器に対応する為の基本的な部分の実装は用意になり，本質的な部分に集中して開発ができるようになった．そこで稲生は 3 次元の点群の為のライブラリである Pcx [8] を拡張して，4 次元点群を表示できるようにした [9].

4 次元空間を可視化し操作するシステムは既にいくつか存在しており，例えば 4Dice [5] では超立方体の 4 次元的な回転をタブレットのタッチ操作で実装しており，4D Maze と 4D Draw [6] ではキーボードの操作で 4 次元を探索できる．そして，4D Toys [7] では 4 次元の多面体の物理演算を実装し，VR 空間にその 3 次元スライスを表示することで 4 次元の物体とのインタラクションができるようにしていた．Polyvision [11] では，1 つの 4 次元の対象の複数の 3 次元射影を VR 空間に表示し，それらを操作することで 4 次元の回転を実装した．他にも，phi16 による VRChat の World [10] でも 4 次元超立方体を回転するデモが実装されているし，講演者の五十嵐のソフトウェアでも VR を用いた別の 4 次元回転の実装がなされている．

4 次元の認知については，4 次元空間における距離と角度に関する実験 [4] がある．これは VR 空間内で 3 次元スライスを連続的に動かせるようにすることで対象を観察し，2 点間の距離や 2 つの線分のなす角をどれだけ理解できるかテストしたものである．また 3 次元物体の形状を把握する為には，回転操作は重要であり，4 次元ではより重要になるものと考えられる．(3 次元の) 回転に関するよく知られた実験の 1 つに，心的回転 [2] に関するものがある．2 つの図形が合同であるか鏡像になっているかを被験者に判定させ，反応時間を測定したものである．

これらの状況を踏まえると，Polyvision などの 4 次元のインタラクティブな可視化の実装が，実際に 4 次元空間や 4 次元図形の理解に貢献できているかどうかの指標の 1 つとして，2 つの 4 次元物体が合同であるかどうかというタスクを行うのが良いのではないかと考えられる．また，心的回転を行うには，4 次元回転に関する十分な経験や訓練が必要となるが，被験者にそれを要求することは難しいため，心的回転ではなく実際に回転させて判定させるのが良いのではないかと考えている．

3　実施状況

新型コロナウイルスの感染拡大状況を踏まえて，Zoom セミナーによるオンライン開催とした．

本共同研究では，公開ワークショップとして，組織委員および関係する研究者・開発者による 11 件の講演を行った．内容は，4 次元の可視化やその VR におけるインタラクションについて，およびその前提となる 3 次元の視覚と認知について，また 3 次元の複雑な数学的対象の可視化についてである．講演後には多くの質問・コメントがあり，講演者と複数の参加者による活発な議論・意見交換がなされた．

それ以外の部分も特に非公開にはしなかったが，主に組織委員によるディスカッション，(議論やテストを円滑に進めるための) 共通の VR 環境・開発環境の構築，VR アプリケーションの開発などを行った．

3.1　講演の概要

今回 4 日間に渡って 11 個の講演を行った．

石井・五十嵐・稲生・鍛冶は 4 次元の可視化とインタラクションに関する現在までの状況や，いくつかの試みについての解説をした．石井は鍛冶・松本・寺尾・稲生らと進めている 4 次元可視化プロジェクトの現状と

展望について，五十嵐は VR を利用した 4 次元空間の可視化と，触覚フィードバックの試みについて解説した．稲生は 4 次元の回転についての概説と，現在実装されているいくつかの方法について解説し，鍛治はパストレーシングという，モンテカルロ法を用いたレンダリングの方法を 4 次元で行う試みについて紹介した．

3 次元・4 次元の空間の認知については，寺尾が 3 次元的な空間の認知について，視覚科学の立場から概要を紹介し，増田は実際に複雑な多面体の形状把握についての実験結果について紹介した．また三浦は 4 次元空間の物体の再構成に関する理論的な枠組みについて解説した．

数学的な対象の可視化については，阿原が 4 次元空間内の曲面，特に代数曲面や曲面結び目の可視化のアイディアを，中村は擬球と呼ばれる 3 次元空間内の複雑なフラクタルを高速に描画するための取り組みを紹介した．名取は東大数理 VR チームで開発した，結び目を VR で作成・変形・操作するソフトウェアの紹介を行い，前田は行列群 $SL(2,\mathbb{R})$ や，$SL(2,\mathbb{C})$ を “極分解” したときの各成分を，3 次元球面や 3 次元双曲空間に埋め込んで可視化する方法について解説した．

3.2　ディスカッションと開発

講演者のうち，五十嵐・名取の 2 名は VR ソフトウェアの開発者なので，我々の Polyvision も含めて，開発したソフトウェアの紹介やそれぞれの現在の状況・今後の方向性などについて意見交換を行った．

また，今回オンライン開催だった為，参加者の個々の環境で開発中のプログラムが動くように，VR 機器や開発環境を整える必要が生じ，そのことに手間を取られてしまった．とはいえ，これによってリモートで開発・テストを進める環境が整ったため，今後の研究が進めやすくなった．

心理実験の設計については，以前開発した Polyvision [11] をベースに，2 つの 4 次元的なオブジェクトが合同であるか鏡像であるかどうかを判断する，というタスクを現在考えている．具体的な対象や表示方法・操作方法について検討しながら，石井，鍛冶，寺尾，松本，三浦，稲生らで議論しながら開発を進めている．

4　4 次元の可視化とインタラクション

以下，現在我々が把握している範囲で実装されている，4 次元の可視化や操作方法について概説することにする．簡単のため，ここでは基本的に 4 次元に絞って議論することにする．

まず，我々が VR 機器を用いて没入できる空間は基本的には 3 次元である．実際にユーザーが動けるのが 3 次元空間である為である．従って，ここでは基本的に高次元の対象を 3 次元空間に射影して，その 3 次元的な像 (影) を VR 機器で観察する，という形を取ることにする[*1]．

4.1　4 次元の可視化

3 次元の対象を紙やディスプレイなどに描画する際には，主に直交射影と透視投影の 2 つが用いられる．従って，4 次元の対象を 3 次元空間に射影するのも，この 2 種類を考えるのが自然であろう：

直交射影　単に 1 つの座標を忘れる：$(x,y,z,w)\mapsto(x,y,z)$，もしくはこれを適当に回転したもの．

透視投影　4 次元空間内にカメラ (1 点) と 3 次元超平面のスクリーンを設置し，そのカメラから見える映像をスクリーンに投影する．つまり，カメラから，見ている対象 (1 点) へ向かう半直線とスクリーンとの交

[*1] 視覚的には他の表現方法も可能かもしれないが，ユーザーの 3 次元的な動きにあわせてそれを自然に変化させる，というのは難しい問題であろう．

点 (もしあれば) を射影した点と思う．

超立方体の図でよくあるものとして，立方体の中にもう 1 つ小さな立方体があって，それらが互いに線分で結ばれているようなものがある．これは「見えない奥行き」方向に関して奥にある立方体が，手前にあるものより小さく描かれた，典型的な透視投影による図である．直交射影だとこの 2 つは同じ大きさにならなければならない．

このように，直交射影で 3 次元に射影すると失われてしまう奥行きの情報は，透視投影では像の大きさという情報として含む．従って，4 次元の対象を可視化する上ではこの方が優れているように思える．しかし一方で，透視投影をする場合は，4 次元空間にカメラを設置して 3 次元空間 (スクリーン) に射影し，その 3 次元空間の中にカメラ (ユーザーの目) を設置して，再度透視投影するという，少し不自然なことをしていることになる．直交射影の場合には，例えば 4 次元空間に 2 次元のカメラと 2 次元のスクリーンを設置し，カメラと対象を含み，スクリーンに直交する平面とスクリーンとの交点を考える，という形にも書ける．従ってこの方が数学的にはシンプルであり，自然な射影とも思える．

射影する以外にも，4D Toys [7] でも用いられているように，4 次元空間の 3 次元的断面を可視化し，その断面をユーザが操作することで 4 次元全体を見る方法もある．この方が見えている部分は理解しやすいが，全体を把握するのは困難かもしれない．一方で，「4 次元的な体積を持つ」対象などでは，境界が 3 次元 (以上) になる．それをそのまま 3 次元空間に射影すると，空間の一部を埋めつくしてしまい，観察することが不可能になる．従ってそのような「大きい」対象を観察する場合は，射影ではなく断面を取らざるを得ないであろう．

また，鍛冶の講演にあった 4 次元パストレーシングとも関連するが，よりリアルに可視化する為にはライティング，つまり光の反射などを考慮して陰影をつけることも必要になってくる．4 次元物体を可視化する際にライティングをどうするかというのも大きな問題である．3 次元に射影した像に 3 次元的なライティングを施す，というのが最も簡単な方法ではあるが，4 次元空間でライティングを考える方が，より 4 次元的な構造が可視化されて良い可能性もありうる．

このような可視化の方法に限らず，以下に述べる操作方法でも，色々な段階で複数の方法が考えられる．そのうちどれが良いかというのは，見たい対象や知りたい構造などに依存して変わってくるであろう．なので全体としての (対象に依らない形での) 手法の優劣については議論しないし，そもそもするべきではないと考えている．

4.2　4 次元の変換

4 次元の対象を観察する際に，まず必要な操作は平行移動と回転 (等長変換) であろう．更に拡大・縮小もあると良いかもしれないが，(一様な) 拡大・縮小については 1 自由度であり，3 次元と 4 次元の場合で差がないので特に議論する必要はないであろう．

平行移動の自由度は次元に等しいため，3 次元から 4 次元になると自由度は 1 増える．この新しい方向 (見えない奥行き方向) への移動は，直交射影の場合は像 (影) は変化せず，透視投影の場合でも全体の大きさや，見えない奥行き方向の位置による大きさの変化の度合いが変わる程度であるため，考える意義は薄い．

ただし，後述する 4 次元空間での回転と組み合わせる場合，回転中心の移動は対象の平行移動と思うことができるため，その意味では必要となるものであることに注意する．とはいえ，新しく増えるのは 1 自由度だけであり，操作による視覚的な変化が少ないことから，VR 特有の自然な操作方法として実装する意義はあまりなく，コントローラのスティック等に割り当てて操作すれば十分であろうと考えられる．

4.3　4 次元の回転とインタラクション

問題なのは回転である．一般に n 次元の回転は $\frac{n(n-1)}{2}$ 自由度ある．空間内の平面を 1 つ決める毎に，その平面上で回転し，それに直交する成分は変えない，ということで回転 (方向) が 1 つ得られるためである．従って，3 次元から 4 次元になると，回転の自由度は 3 から 6 へと 2 倍に増えることになる．具体的には，3 次元空間内の 1 つの方向を決めると，それと「見えない奥行き」方向で張られる平面での回転を考えることができる．元の空間が 3 次元なので，このような回転は 3 自由度あり，これらが 4 次元で新しく現れる回転である．

4 次元の回転群 $SO(4)$ を 3 次元の回転などを用いて表す方法はいくつかある．以下ではそれらを紹介し，その表示方法に関連した VR でのインタラクションの実装案について解説する．

4.3.1　四元数を用いた表示

四元数体 $\mathbb{H} = \{w + xi + yj + zk;\ x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$ を考える．以下，ベクトル部 $\{xi + yj + zk\} \subset \mathbb{H}$ を $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)\}$ と同一視する．また $\boldsymbol{q} = w + xi + jy + zk \in \mathbb{H}$ の共役を $\boldsymbol{q}^* = w - xi - yj - zk$ と書き，$\mathbb{H}$ 上のノルムを $\|\boldsymbol{q}\| = \sqrt{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^*}$ と定める．また $\mathbb{H}$ 内の 3 次元単位球面を $S^3 = \{\boldsymbol{q} \in \mathbb{H};\ \|\boldsymbol{q}\| = 1\}$ と書く．

四元数体は以下のようにして 3 次元，4 次元の回転と結びつけられていることはよく知られている．

定理 1． *3* 次元の単位ベクトル $\boldsymbol{a} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $\|\boldsymbol{a}\| = 1$ と $\theta \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\boldsymbol{q} = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\boldsymbol{a}$$

とする．このとき，写像

$$\boldsymbol{p} \longmapsto \boldsymbol{q}\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}*$$

を $\mathbb{R}^3$ に制限したものは，$\boldsymbol{a}$ を軸とする角度 θ の回転を表す．

これによって定まる写像 $S^3 \to SO(3)$ は二重被覆である．

定理 2． $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \in S^3 \times S^3$ に対し，$\mathbb{H} \ni \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{p}\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}^* \in \mathbb{H}$ は $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ の回転であり，従って $SO(4)$ の元を定める．

更に，この対応

$$S^3 \times S^3 \to SO(4)$$

は二重被覆である．

さて，3D CG プログラミングの世界では，よく定理 1 を利用して，回転を四元数で表す．従って，VR ソフトウェアの開発においても，HMD やコントローラの向きを四元数として得ることができる．このことと定理 1 の代わりに定理 2 を利用することで，4 次元の回転を実装することができる．つまり，左右のコントローラの向き (もしくは 1 フレームあたりの回転量．以下同様) がそれぞれ $\boldsymbol{q}_L, \boldsymbol{q}_R$ のときに，写像

$$\mathbb{H} \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{q}_L\boldsymbol{x}\boldsymbol{q}_R^*$$

によって 4 次元の回転が 1 つ定まる．つまり，VR コントローラ 2 つの回転によって，4 次元的に物体を回転させることができるのである．

この方法は phi16 によって VRChat 上に実装されている [10]．定義と上の 2 つの定理からわかるように，左右のコントローラを同じように回転させると，3 次元的な回転を得ることができる．片方だけ回転したり，両方で違う回転をすると，4 次元的な (3 次元的でない) 回転が作用することになる．

4.3.2　3 次元の回転と平行移動を用いた 4 次元の回転の実装

VR コントローラは，位置と回転で 6 自由度，つまり 4 次元の回転と同じだけの自由度を持つ．これを自然に 4 次元の回転に割り当てる方法もある．

まず 1 次元低い状況で考えてみよう．ディスプレイに 3D の対象を表示して，マウスなどでドラッグして回転させる場合，ドラッグした方向と画面に垂直な方向で回転する，という実装がよく用いられている．タブレット上でフリックした場合も同様である．

これを 1 次元上げて考えると，3 次元の平行移動に対して，その移動方向と「見えない奥行き」方向のなす平面で回転させればよいことがわかる．これと通常の 3 次元の回転をあわせると 4 次元の回転が全て実現できる．実装としては，1 つの VR コントローラの回転をそのまま $\mathbb{R}^3$ での回転とし，それに加えて，そのコントローラの平行移動を上述のように平行移動方向と「見えない奥行き」方向のなす平面での回転 (移動量を回転量に割り当てる) とすればよい．

これで 1 つの VR コントローラで 4 次元の回転を全て扱うことができる．これは今回の講演者の一人である五十嵐が既に実装している．

4.3.3　複数の 3 次元射影を扱う方法

4 次元の対象を 3 次元空間に射影すると，1 つの射影では 3 自由度の回転しか得られない．しかし，複数の射影を考えれば全ての回転を含むことができる．具体的には，x, y, z, w の各軸に沿った 3 次元空間への射影を考える．それぞれの射影での回転を組み合わせれば，全ての 4 次元回転を表すことができる．

実装としては，4 つの射影を同時に表示し，ユーザはその中から 1 つを選んで，それをコントローラで 3 次元的に回転させる．それを 4 次元空間での回転に持ち上げ，他の射影にも反映させる．複数の射影を選んで色々回転させることで，4 次元的な回転を得ることができる．

この方法は Polyvision [11] で実装されたものである．特徴としては，見かけ上 $4 \times 3 = 12$ 自由度，つまり本来の 6 自由度の 2 倍の自由度があり，冗長になっていることが挙げられる．複数の像を同時に見ることの難しさが問題点として挙げられるが，選択した像の回転は 3 次元的で，コントローラを持っている手の身体感覚に合致しているので予想がつくものである．他の像を見ながら回転すると，自分の 3 次元的な回転の操作がどう 4 次元的に他の像に作用しているかを見ることができる．

4.3.4　$SU(2)$ 作用

考えている (実)4 次元空間が複素構造を持つ，つまり $\mathbb{C}^2$ を考えている場合，$\mathbb{C}^2$ 上の「回転」としては，$SU(2)$ を考えるのが自然であろう．つまり，複素構造を保つ等長変換を考えるのである．$SU(2)$ は実 3 次元であり，$\mathbb{H}$ には自然に $\mathbb{C}^2$ の複素構造が入っている．また $SU(2)$ は S^3 と同型になっているので，コントローラの回転 (向き) を四元数で得ることで，すぐに $SU(2)$ 作用にすることができる．

これは複素構造がある場合には数学的に自然な作用であるが，元の 3 次元的な回転は含んでおらず，直感的にわかりやすいかというと疑問が残る．

4.4　4 次元ポインタ

4 次元の対象を観察していると，様々な理由で 4 次元空間内の 1 点を指し示す必要が出てくる．それをどのように実装するかについては，まだあまり良いアイディアがない．

稲生は実験的に，VR コントローラを向けた方向に小さな球を表示し，それをコントローラのスティックで奥行き (コントローラからの距離) 方向と「見えない奥行き」方向に動かす方法を実装した．原理的にはこれで 4 次元空間内の任意の点を指し示すことができるものの，見えない奥行き方向が直感的に理解できるようなインターフェイスをどのように実装するか，また，4 次元的な回転をすると指し示していた点を容易に見失ってしまうことなど，まだまだ問題は多い．

5 心理実験に向けて

既に述べたように，心理実験のための VR ソフトウェアを現在開発している．元になっている Polyvision は古いライブラリに依存していたため，それらを新たに書き直し，上で解説した 4 種類の回転方法を全て実装した．これによって可視化とインタラクションのシステム的な部分はほぼ完成している．

しかしながら，実際に被験者にどのような対象を，どのように表示し，どう操作してもらうか，上述のように，それぞれに複数の方法が考えられるため，難易度も考慮しながら決定しなければならない．実際，超立方体の辺に色をつけて描いたもので試してみても，なかなか望む向きになるよう回転したり，それによって 2 つの超立方体が合同か鏡像かを判定したりするのは難しい．被験者が短時間の訓練で解くことができるレベルの難易度になるようタスクを設計しないと実験が意味をなさないので，色々な 4 次元図形を作成して試してみる必要がある．実際，超立方体の辺に色をつけて，2 つの超立方体が合同なのか鏡映になっているのかを判断するテストを共同研究者たちで試しているが，それでも簡単ではないことがわかっている．また，複数の射影した像を一度に見るのは難しいので，どのように表示すれば見やすくなるか，コントローラでの操作をどのように割り当てればわかりやすいか，といった細々としたチューニングも必要である．

これらについては，実際に共同研究者たちで試行錯誤しているところであり，今後できるだけ早く決定して心理実験を行いたいと考えている．

参考文献

[1] Edwin A. Abbott. *Flatland: A Romance of Many Dimensions*. Seeley & Co. 1884.

[2] Roger N. Shepard, Jacqueline Metzler. *Mental Rotation of Three-Dimensional Objects*. Science, 171 (3972), 701-3. 1971.

[3] 宇敷重廣. *Shigehiro Ushiki Home Page*. `https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~ushiki/`

[4] Michael S. Ambinder, Ranxiao Frances Wang, James A. Crowell, George K. Francis, Peter Brinkmann. *Human four-dimensional spatial intuition in virtual reality*. Psychonomic Bulletin & Review 16, 818–823, 2009.

[5] Andrew J. Hanson. *4Dice*. 2012. `https://www.cs.indiana.edu/~hanson/`

[6] Jeffrey Weeks. *4D Maze and 4D Draw*. 2016. `http://geometrygames.org`

[7] Marc ten Bosch. *4D Toys*. 2017. `http://4dtoys.com`

[8] Keijiro Takahashi. *Pcx - Point Cloud Importer/Renderer for Unity*. 2017. `https://github.com/keijiro/Pcx`

[9] Hiroyuki Inou. *Pcx4D - 4D Point Cloud Importer/Renderer for Unity*. 2018. `https://github.com/romanesco/Pcx4D`

[10] phi16. *Inter-action on the Math*. 2019. `https://vrchat.com/home/world/wrld_`

`c937bde4-b585-4e6b-9623-d16525780287`

[11] Keigo Matsumoto, Nami Ogawa, Hiroyuki Inou, Shizuo Kaji, Yutaka Ishii, Michitaka Hirose. *Polyvision: 4D Space Manipulation Through Multiple Projections.* SIGGRAPH Asia 2019 Emerging Technologies 36–37. `http://doi.acm.org/10.1145/3355049.3360518`

九州大学 IMI 共同利用・短期共同研究

「VR を用いたインタラクティブな高次元認識」

Interactive cognition of higher dimension with VR

2021 年 2 月 8 日 (月) 〜 2021 年 2 月 12 日 (金)

Zoom によるオンライン開催

プログラム

2 月 8 日 (月)

10:00–10:30　石井 豊 Yutaka Ishii (九州大学)

　４次元可視化プロジェクト

　4D visualization project

10:45-11:15　五十嵐 治雄 Haruo Igarashi (早稲田大学)

　触覚フィードバックを伴う 4 次元空間の可視化とインタラクション

　4D Space Visualization and Interaction with Tactile Feedback

11:30-12:00　寺尾 将彦 Masahiko Terao (山口大学)

　三次元的に空間を見るということ

　Our visual system in the three-dimensional world

13:30-　Discussion

2 月 9 日 (火)

10:00–10:30　三浦 真人 Makoto Miura (東京大学)

　4 次元空間の計量再構成に向けて

10:45-11:15　阿原 一志 Kazushi Ahara (明治大学)

　4 次元空間に埋め込まれた曲面の可視化について

　On visualization of surfaces embedded in the 4-space

11:30-12:00　稲生 啓行 Hiroyuki Inou (京都大学)

　4 次元の回転と VR における操作

　Rotation in the 4-space and its controls in VR

13:30-　Discussion

2 月 10 日 (水)

10:00–10:30　増田 康成 Yasunari Masuda (明治大学)

　多面体の形状把握を促進する ICT 教材の検討：VR 空間上の多面体への身体的関与の実現に向けて

　Examination of ICT teaching materials to promote shape grasp of polyhedron: Toward the realization of physical involvement in polyhedron in VR space.

　（阿原一志（明治大学）・小松孝徳（明治大学）・清河幸子氏（東京大学）との共同研究）

10:45-11:15　中村 建斗 Kento Nakamura (明治大学)

球面体群と擬球の VR を用いた可視化への試み

Sphairahedron groups and quasi-sphere in VR

11:30-12:00　名取 雅生 Masaki Natori (東京大学)

VR を用いた結び目の描画と変形

Drawing and deforming knots in VR

13:30-　Discussion

2 月 12 日 (金)

10:00–10:30　前田 陽一 Yoichi Maeda (東海大学)

行列群 $SL(2,\mathbb{R})$, $SL(2,\mathbb{C})$ を 3 次元空間で視る方法

Visualization of $SL(2,\mathbb{R})$ and $SL(2,\mathbb{C})$ in three-dimensional space

10:45-11:15　鍛冶 静雄 Shizuo Kaji (九州大学)

シンプルな 4 次元パストレーサーによるレンダリング

A simple path tracer for 4D scene rendering

13:30-　Discussion