

# 2024年度共同利用研究報告書

2024年07月28日

所属・職名 名古屋工業大学・工学部・准教授

中島 規博

		整理番号	2024a018	
1.研究計画題目	誤り訂正符号と超平面配置に関わる多項式不変量			
2.新規・継続	継続			
3.種別	一般研究			
4.種目	研究集会（Ⅱ）			
5.開催方法	対面開催			
6.研究代表者	氏名	中島 規博		
	所属 部局名	名古屋工業大学・工学部	職名	准教授
7.研究実施期間	2024年06月27日(木曜日)～2024年06月27日(木曜日)			
8.キーワード	誤り訂正符号, 超平面配置, 格子, グラフ, マトロイド, 重み多項式, コバウンダリー多項式, Tutte多項式, 特性準多項式			
9.参加者人数	24人			

## 10.本研究で得られた成果の概要

誤り訂正符号は伝送路で発生する誤りを自動で訂正するための技術に使われている。特に、誤り訂正符号のハミング重み多項式は、誤り訂正アルゴリズムの訂正能力評価に関わっている。一方で、コバウンダリー多項式は、超平面配置の交わりの情報から計算することのできる多項式である。これら2つの多項式には簡単な変換式が存在し、本質的に同じ多項式である。本研究の計画に至った動機は、これらの多項式の変換式を含め、誤り訂正符号の理論と超平面配置の理論のつながりを周知することで、応用面と理論面の両面で関連する研究を活発化したいと思ったことである。本件に関して、本集会の最初の講演者である辻栄氏に、上記2つの多項式に関するオーバービューを含めた講演を行ってもらうことで、符号理論や超平面配置の専門家への周知をうながした。辻栄氏の講演には多くの質問やコメントがあり、2つの理論に関連性について、十分に周知ができたと考えている。

また、本研究集会をきっかけとして、研究代表者が参加者と議論を行う中で、符号理論のある概念が、超平面配置の理論と深くかかわることが確認された。この概念が超平面配置とかかわることは、前回の共同利用では気づくことができなかつたので、今回の大きな進展といえる。研究代表者と関係する参加者で議論を行いながら、共同研究を進める予定である。

## 成果報告

### 誤り訂正符号と超平面配置に関わる多項式不変量

誤り訂正アルゴリズムのある種の訂正能力は誤り訂正符号の0でない重みの最小値  $d$  で計ることができる。具体的には、多くの復号アルゴリズムにおいて、訂正可能なエラーの数が  $\lfloor (d-1)/2 \rfloor$  以下であることが知られている ( $\lfloor \cdot \rfloor$  はガウス記号)。ハミング重み多項式を計算することで  $d$  の値が計算できるので、ハミング重み多項式の計算から誤り訂正符号の訂正能力を評価につなげることができる。また、誤り訂正符号理論におけるハミング重み多項式と、超平面配置のコバウンダリー多項式（あるいは Tutte 多項式）には、簡単な変換式が存在し、本質的に同じ多項式であることが知られている。本研究集会では、これら多項式を通して両理論の関係をより深く理解し、誤り訂正アルゴリズムの訂正能力評価への応用につなげることを目的とした。

本研究集会の最初の講演において、北海道教育大学辻栄周平氏により上記の誤り訂正符号と超平面配置の関係に関するオーバービューが説明され、現在までにわかっていることと、これから考えるべき問題に関して講演された。また、本共同研究に関連する研究として、西村優作氏（早稲田大学）、田中優帆氏（早稲田大学）、佐藤巖氏（小山高専）、黒田匡迪氏（日本文理大学）、齋藤琢弥氏（北海道大学）を講演者として招き、符号理論、超平面配置の理論、マトロイド理論、グラフ理論といった本共同利用に関わる理論の講演をしていただいた。それぞれの講演に対して多くの質問やコメントがあり、有意義な研究集会であったと考えている。研究集会への参加者は24名であった。

各講演者の講演の概要と、本研究の成果として既に広げられている共同研究、論文出版計画、共同研究の可能性のあるものなどは以下の通りである。

- 辻栄周平氏。誤り訂正符号と超平面配置の関係が説明され、ハミング重み多項式の準多項式版について現在までに分かっていることが紹介された。特に、代数体の整数環でよい性質を持つ環上の符号に関する MacWilliams 恒等式が成り立つことが明らかにされた。本発表は黒田匡迪氏と研究代表者との共同研究に基づくものである。
- 西村優作氏。Universal graph series というグラフの系列が定義され、その系列に付随した四つのグラフの不変量とその性質が説明された。

- 田中優帆氏. サイクルグラフ上の2粒子ランダムウォークの例を用いながら, グラフ上の多粒子ランダムウォークにおける期待到達時間について講演された. 特に, 多粒子ランダムウォークの arc average hitting time がグラフのクロネッカー積上の1粒子のランダムウォークにおける期待到達時間と同一視できることを紹介された.
- 佐藤巖氏. 伊原ゼータ関数から始まり, グラフのゼータ関数, 有限群の群行列の成分を重みとするグラフのゼータ関数が紹介され, 関連する話題について講演された. 本研究は早稲田大学の三枝崎剛氏との共同研究である.
- 黒田匡迪氏. 符号理論における例外的数の定義は, 暗号理論における次の定義と同値である: 無数の  $n$  に対して, 単項関数  $f(x) = x^t$  は  $F_{2^n}$  上で APN (Almost Perfect Nonlinear) である.

2011年に Hernando と McGuire によって, 例外的数は  $2^i - 1$  と  $4^i - 2^i + 1$  の形で書けるもののみであることが証明されており, 例外的数の分類が完成している. 標数2の APN 関数の奇標数への一般化である PN (Perfect Nonlinear) 関数, GAPN (Generalized APN) 関数を用いることで, 上記の標数2の例外的数の定義を奇標数へ一般化することができ, 奇標数の例外的数の分類について考察が行われた.

- 齋藤琢弥氏. マトロイドの特性多項式の擬表現から定まる圏化を紹介され, グラフや超平面配置の不変量の圏化と関連が説明された. 特に, 異なる擬表現が同じコホモロジーを与えるのはいつであるか? という疑問について発表された. 本研究は福岡大学の山形颯氏との共同研究である.

今後も誤り訂正符号の理論と超平面配置の理論の関連や周辺の研究について議論する場を提供していき, 本共同研究に関わる理論の発展を促したいと考えている.

研究代表者  
中島規博

誤り訂正符号と超平面配置に関わる多項式不変量  
Polynomial invariants related to error-correcting codes and hyperplane  
arrangements

6月27日 (木)

9:30-10:30

講演者：辻栄 周平 (北海道教育大学)

講演タイトル：コバウンダリー準多項式について

10:50-11:20

講演者：西村 優作 (早稲田大学)

講演タイトル：彩色対称関数の一般化とそれに付随する新たなグラフの不変量

11:30-12:00

講演者：田中 優帆 (早稲田大学)

講演タイトル：グラフ上の多粒子ランダムウォークにおける期待到達時間について

13:30-14:30

講演者：佐藤 巖 (小山高専)

講演タイトル：有限群の群行列に関するグラフゼータ関数

14:50-15:50

講演者：黒田 匡迪（日本文理大学）

講演タイトル：例外的数の一般化とその分類について

16:10-17:10

講演者：齋藤 琢弥（北海道大学/トリノ大学）

講演タイトル：マトロイドの特性多項式の圏化

H P 掲載用英文

Speaker: Shuhei Tsujie (Hokkaido University of Education)

Title: On coboundary polynomials

Speaker: Yusaku Nishimura (Waseda University)

Title: Universal graph series, chromatic functions, and their index theory

Speaker: Yuho Tanaka (Waseda University)

Title: On the average hitting time of multiple random walk of graphs

Speaker: Iwao Sato (National Institute of Technology, Oyama College)

Title: The graph zeta function with respect to the group matrix of a finite group

Speaker: Masamichi Kuroda (Nippon Bunri University)

Title: On a generalization of exceptional numbers and their classification

Speaker: Takuya Saito (Hokkaido University/ University of Turin)

Title: A categorification for the characteristic polynomial of matroids