

## 2025年度共同利用研究報告書

2025年09月19日

所属・職名 京都大学・サイエンス連携探索センター・特定准教授

石川 勲

		整理番号	2025a042	
1.研究計画題目	データ駆動的流体解析に向けたBesov空間とKoopman作用素の統合的研究			
2.新規・継続	新規			
3.種別	一般研究			
4.種目	短期共同研究			
5.開催方法	ハイブリッド開催			
6.研究代表者	氏名	石川 勲		
	所属 部局名	京都大学・サイエンス連携探索センター	職名	特定准教授
7.研究実施期間	2025年06月11日(水曜日)~2025年06月14日(土曜日)			
8.キーワード	Besov空間, 動的モード分解, Koopman作用素, Navier-Stokes方程式			
9.参加者人数	48人			

### 10.本研究で得られた成果の概要

本研究は、流体・PDEデータを安定に解析・予測するために、Besov空間とKoopman作用素 (=合成作用素) を共通基盤として理論とデータ駆動を往還させる構想から出発した。今年度は線形写像に対する合成作用素の作用素ノルムについて、同次/非同次Besovの差異まで明確化した同値評価を確立した。これは非線形写像の解析を線形の場合に還元する既知の手法を踏まえると、広範な応用の基盤となる進展である。関連する先行成果として、合成作用素の有界性に関する研究代表者および参加者の論文 (Mathematische Annalen, 2024) を既に公表済みであり、本年度の結果はその高次元化・体系化に位置づく。一方で、BesovDMDはウェーブレット等の基底とスケール重み付けに基づく新手法として提案段階にある。今後はBesovDMDの考察と誤差解析を進め、流体への適用の可能性を精査する。当面の成果はプレプリントとして公開し、投稿と共同研究の拡大を計画している。

# データ駆動的流体解析に向けた Besov 空間と Koopman 作用素の統合的研究

## 成果報告書

池田 正弘 (理化学研究所)      石川 勲\* (京都大学)      谷口 晃一 (静岡大学)

### 1 研究集会の報告

本課題 (整理番号: 2025a042) は, Besov 空間と Koopman 作用素 (=合成作用素) を基盤として, PDE の理論解析・数値解析・データ駆動モデル化を接続することを目的として企画された. また, 流体と機械学習と数学にまたがる研究者を集めた分野融合的なワークショップを開催し, 研究交流を行った. 研究計画題目は「データ駆動的流体解析に向けた Besov 空間と Koopman 作用素の統合的研究」であり, 公開セッション (6/12-13) と非公開の共同研究セッション (6/11, 6/13, 6/14) から構成されている.

採択～会合までの準備 採択決定後, 以下の準備を段階的に実施した:

- **論点整理メモ**: 力学系  $T$  から定まる合成作用素 (Koopman 作用素)  $C_T$  の既存結果と未解決課題 (高次元/斉次・非斉次 Besov の取り扱い,  $L^p$  部分と半ノルム部分それぞれの処理) を概観し, 解決すべき問題を抽出.
- **文献集の共有**: Besov 空間での変数変換・合成に関する古典的結果 (例: [2, 1]) や, 近年の関連論文 (例: [4, 5, 6]) を中心に精査.

**公開セッションについて** 理論 (Navier-Stokes 方程式の解の解析), 数理モデリング (同化・フィルタ), 機械学習 (GNN) など広範な分野にまたがる講演者を招待し, 流体をキーワードとした最新の研究成果を各研究者に共有してもらった. 事前登録情報に基づく本ワークショップの概況は次の通りである: 2日間のべ参加者は 102 名にのぼり, ハイブリッド形式にしたことで幅広い背景を持つ人たちからの参加があった. 全国 42 機関から参加 (九州大学 6, 国立大学 24, 私立大学 7, 公的研究機関 4, 企業 5) があり, さらに, 職位についても **教授相当 5, 准教授・講師相当 12, 助教相当 8, 研究員・ポスドク相当 15, 大学院生 3** など広範囲にわたった. また, 解析・偏微分方程式, 数値解析, データ駆動モデリング, 力学系, 機械学習など幅広い研究者による活発な研究交流が行われた. プログラムは以下の通りである:

---

\*代表研究者

## プログラム

### 6月12日(木)

10:30-10:40 オープニング

10:40-11:20 谷口 伸隆 (東北大学): 非線形最適外力解析による翼型周りの流れ場の低周波数振動の制御に関する研究

11:30-12:10 堀江 正信 (RICOS): 局所保存的グラフニューラルネットワークによるマルチスケール流体機械学習

14:00-14:40 焼野 藍子 (東北大学) ※オンライン: データ同化による流体モデルの最適化とその応用

14:50-15:30 竹田 航太 (名古屋大学): Lorenz96 モデルのノイズを含む部分観測に対する Ensemble Kalman Filter の誤差解析

16:00-16:40 赤嶺 政仁 (東京大学): 乱流ジェットの時局・局所的なコヒーレント構造について

16:50-17:30 千頭 昇 (名古屋工業大学) ※オンライン: 非圧縮性 Navier-Stokes 系の漸近挙動再考

### 6月13日(金)

10:00-10:40 足立 景亮 (理化学研究所) ※オンライン: ゆらぐ流体方程式を用いた多粒子系の相挙動の研究

11:00-11:40 寺本 有花 (愛媛大学): The flow of compressible nematic liquid crystal

12:00-12:40 橋本 悠香 (NTT): Spectral truncation を用いた関数値カーネルの構成

**非公開セッションの実施体制と参加者** 非公開枠では、(線型写像に関する) Koopman 作用素の作用素ノルムの明示公式の証明スケッチの具体化、および BesovDMD の研究に集中した。いずれの日程においても、参加者は石川 勲 (京都大学大学院 理学研究科附属サイエンス連携探索センター)、谷口 晃一 (静岡大学工学部)、池田 正弘 (大阪大学大学院情報科学研究科) の計3名である。お互いの専門知識を活かし、理論的な側面を主に考察した。

非線形な写像の合成作用素の解析は線形な場合に帰着できる手法が知られている [3]。そのため、線形写像  $A$  に関する合成作用素  $C_A$  のノルム評価は非常に重要であり、空間の**斉次/非斉次**の差異まで含めて明確化できたことは大きな進展と言える。また、BesovDMD の構成についても議論を行った。Besov 空間を用いた DMD の既存手法では、Besov 空間に定まる Wavelet 基底に対して、 $L^2$  空間ベースの EDMD を適用するにとどまるもののみであり、Besov 空間に定まるノルムも考慮に入れたアプローチは考察されてこなかった。今回は、そのアプローチについて考察を行い、その可能性や今後の方針について議論を行った。

**成果の公表計画と既存の結果との関連について** 本命題・BesovDMD の初期結果はプレプリントとして公開予定である。関連する 2024 年度の先行成果として、合成作用素の有界性に関する結果 [4] が得られている。背景には変数変換に関する古典的結果 [2] がある。

## 2 理論的成果：線形写像に対する合成作用素の有界性

線型写像  $A$  に対する合成作用素の作用素ノルムの特徴付けとして次の結果が得られた：

**Proposition 2.1.**  $s > 0, 1 \leq p, q < \infty$  とする．すべての実正則行列  $A$  に対して，次が成り立つ：

$$\|C_A\|_{\dot{B}_{p,q}^s \rightarrow \dot{B}_{p,q}^s} \sim \frac{\|A\|_{\text{op}}^s}{|\det A|^{\frac{1}{p}}}, \quad (2.1)$$

$$\|C_A\|_{B_{p,q}^s \rightarrow B_{p,q}^s} \sim \frac{1 + \|A\|_{\text{op}}^s}{|\det A|^{\frac{1}{p}}}, \quad (2.2)$$

$$\|C_A\|_{B_{p,q}^s \rightarrow \dot{B}_{p,q}^s} \sim \frac{\|A\|_{\text{op}}^s}{|\det A|^{\frac{1}{p}}}. \quad (2.3)$$

ここで， $\|\cdot\|_{\text{op}}$  は作用素ノルムであり， $\dot{B}_{p,q}^s, B_{p,q}^s$  はそれぞれ斉次 Besov 空間と非斉次 Besov 空間である．

**証明のアイデア**  $L^p$  における変数変換の寄与が  $|\det A|^{-1/p}$  として現れる．Besov ノルムは Littlewood–Paley 分解で記述することができるが，それらを注意深く計算することにより， $C_A$  によるノルムの変化が  $\|A\|_{\text{op}}$  の  $s$  乗で寄与することが証明できる．斉次 Besov 空間  $\dot{B}_{p,q}^s$  では  $\|A\|_{\text{op}}^s$  のみが残る，(2.1) と (2.3) が得られる．非斉次 Besov 空間では  $B_{p,q}^s$  では，Littlewood–Paley 分解の低周波部分は分解しないため，(2.2) において  $1 + \|A\|_{\text{op}}^s$  の形が現れる． $\sim$  に隠れている定数は  $d, s, p, q$  のみに依存し， $A$  に依らないことに注意する．

## 3 輸送方程式との関係

輸送方程式  $\partial_t u + b \cdot \nabla u = 0$  の解は  $\dot{v} = b(v)$  の flow 写像  $\Phi_t$  を用いて  $u(t, \cdot) = u_0 \circ \Phi_t$  と書ける，ここで， $u_0$  は初期値である．したがって  $u(t, \cdot)$  の Besov 空間の関数を初期値とした時の時間発展の挙動は，合成作用素  $C_{\Phi_t}$  のノルム評価に帰着される．例えば，線形の場合 ( $b(x) = Ax$ ) では  $\Phi_t = e^{tA}$  であり，命題より

$$\|u(t, \cdot)\|_{B_{p,q}^s} \lesssim \|e^{tA}\|_s e^{-\frac{t}{p} \text{tr} A} \|u_0\|_{B_{p,q}^s},$$

が従う．一般の時間依存・空間依存の流れでも，解の挙動を Besov 空間において整理できることが期待できる．これは輸送方程式の**理論解析** (well-posedness・安定性の評価) に結びつくことが期待できる．

## 4 BesovDMD：アイデアと応用可能性

Koopman 作用素と DMD には深い関係性が知られているため，Besov 空間におけるノルムと基底 (Wavelet 基底など) をベースにした Koopman 作用素の有限次元近似は有望なアプローチである．ただ Besov ノルムについては数値計算の方法が大きな課題であり問題があり今後は数値計算の専門家などにも相談をしつつ研究を進める必要がある．また，具体的なアルゴリズム (基底生成→係数推定→正則化→固有解析) 構築や流体に関する PDE への適用可能性についての考察は今後取り組んでいく予定である．

## References

- [1] Gérard Bourdaud. Changes of variable in besov spaces. ii. *Forum Math.*, 12(5):545–563.
- [2] Gerard Bourdaud and Winfried Sickel. Changes of variable in besov spaces. *Math. Nachr.*, 198:19–39.
- [3] Naoya Hatano, Masahiro Ikeda, Isao Ishikawa, and Yoshihiro Sawano. Boundedness of composition operators on morrey spaces and weak morrey spaces. *J. Inequal. Appl.*, 198:19–39.
- [4] Masahiro Ikeda, Isao Ishikawa, and Koichi Taniguchi. Boundedness of composition operators on higher order besov spaces in one dimension. *Mathematische Annalen*, 388(4):4487–4510, Apr 2024.
- [5] Herbert Koch, Pekka Koskela, Eero Saksman, and Tomás Soto. Bounded compositions on scaling invariant besov spaces. *J. Funct. Anal.*, 266(5):2765–2788.
- [6] Van Kien Nguyen and Winfried Sickel. On a problem of jaak peetre concerning pointwise multipliers of besov spaces. *Studia Math.*, 243(2):207–231.

開催日: 2025/06/12~2025/06/13

## ワークショップ 数理・計算・データに基づく流体解析の最前線 | 2025a042

カテゴリ: イベント タグ: 一般研究 短期共同研究

## 開催概要

- 開催方法: リファレンス大博多ビルとZoomミーティングによるハイブリッド開催
- 開催場所: リファレンス大博多ビル 11F 会議室 1105  
〒812-0011 福岡市博多区博多駅前1-20-1 大博多ビル 11F  
アクセス: <https://re-rental.com/hakata/access/>
- 主要言語: 日本語
- 主催: 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所
- 種別・種目: 一般研究-短期共同研究
- 研究計画題目: データ駆動的流体解析に向けたBesov空間とKoopman作用素の統合的研究
- 研究代表者: 石川 勲 (京都大学 サイエンス連携探索センター 特定准教授)
- 研究実施期間: 2025年6月11日(水) ~ 2025年6月14日(土)
- 公開期間: 2025年6月12日(木) ~ 2025年6月13日(金)
- 研究計画詳細: [https://joint2.imi.kyushu-u.ac.jp/research\\_chooses/view/2025a042](https://joint2.imi.kyushu-u.ac.jp/research_chooses/view/2025a042)

## プログラム

6月11日(水) 16:00~18:00 ※非公開

6月12日(木)

- 10:30-10:40  
オープニング
- 10:40-11:20  
谷口 伸隆 (東北大学)  
非線形最適外力解析による翼型周りの流れ場の低周波数振動の制御に関する研究
- 11:30-12:10  
堀江 正信 (RICOS)  
局所保存的グラフニューラルネットワークによるマルチスケール流体機械学習
- 14:00-14:40  
焼野 藍子 (東北大学) ※オンライン  
データ同化による流体モデルの最適化とその応用
- 14:50-15:30  
竹田 航太 (名古屋大学)  
Lorenz96モデルのノイズを含む部分観測に対するEnsemble Kalman Filterの誤差解析
- 16:00-16:40  
寺本 有花 (愛媛大学)  
The flow of compressible nematic liquid crystal
- 16:50-17:30  
赤嶺 政仁 (東京大学)  
乱流ジェットの時・局所的なコヒーレント構造について

## 6月13日(金)

---

- 10:00-10:40

足立 景亮(理化学研究所) ※オンライン  
ゆらぐ流体方程式を用いた多粒子系の相挙動の研究

- 11:00-11:40

千頭 昇(名古屋工業大学) ※オンライン  
非圧縮性 Navier-Stokes 系の漸近挙動再考

- 12:00-12:40

橋本 悠香(NTT)  
Spectral truncationを用いた関数値カーネルの構成

- 14:00~17:00 非公開

## 6月14日(土) 10:00~12:00 ※非公開

---

---