

2025年度共同利用研究報告書

2025年11月23日

所属・職名 愛知教育大学教育学部・教授

淺井 暢宏

		整理番号	2025a016	
1.研究計画題目	Non-Commutative Probability and Related Topics 2025（非可換確率論とその関連領域2025）			
2.新規・継続	新規			
3.種別	一般研究			
4.種目	研究集会（Ⅱ）			
5.開催方法	対面開催			
6.研究代表者	氏名	浅井 暢宏		
	所属 部局名	愛知教育大学教育学部	職 名	教授
7.研究実施期間	2025年10月08日(水曜日)～2025年10月10日(金曜日)			
8.キーワード	非可換（量子）確率論、数理物理、ランダム行列、作用素環、直交多項式・特殊関数、量子ウォーク、表現論、函数論、組合せ論、学習理論			
9.参加者人数	35人			

10.本研究で得られた成果の概要

本研究集会には、講演者を含む35名が参加し、その内訳は大学所属研究者20名、大学院生12名、産業界からの参加者3名であった。多様な背景をもつ研究者が一堂に会したこと、非可換（量子）確率論および関連諸分野・領域における課題の共有と掘り起しが進むとともに、分野や世代を横断した議論と交流が生まれました。本研究集会はIMI共同利用の初年度であることを踏まえ、各講演者は最新の研究成果の解説にとどまらず、関連諸分野の研究者にも十分配慮した基礎的内容や歴史的背景を適宜盛り込んだ講演がなされました。非可換確率論の研究者による講演では、当該分野が様々な分野・領域の手法を取り入れて発展してきたことを踏まえ、近年の研究成果や新たな展開に関する具体的な報告がなされました。一方、関連諸分野の研究者による講演でも、最新成果だけでなく基礎的事項の丁寧な解説が行われ、各参加者にとって新たな専門的知識の修得および情報収集の有意義な機会となりました。これらを契機に、分野や世代を超えた活発な研究討論や情報交換が自然に行われました。さらに、いくつかの講演では、研究萌芽期における背景・状況やアイデアの源泉が提示され、理論形成の歴史的背景を直接知ることができる貴重な機会となりました。また、複数の若手研究者からは、普段接点の少ない異分野研究者との議論を通じて、通常は思いも付かない新たな研究課題との接点に気づくことができ、大変有意義であったとの感想も寄せられています。これら今年度の成果を通じて、初年度の目的の一つであった人的ネットワーク構築に向けた基盤形成を着実に進める機会となり、今後のさらなる研究協力体制の発展に向けた種まきとして、大変意義深いものとなりました。今後、一層充実した研究活動が展開されることが期待されます。

2025（令和7）年度九州大学IMI共同利用（一般研究—研究集会（II））

**Non-Commutative Probability
and Related Topics 2025
(非可換確率論とその関連領域 2025)**

成果報告書

2025年10月8日(水)～10月10日(金)

九州大学 西新プラザ大会議室

組織委員:

淺井 暢宏(愛知教育大学, 研究代表者)

植田 優基(北海道教育大学)

瀬川 悅生(横浜国立大学)

廣島 文生(九州大学)

吉田 裕亮(城西大学/お茶の水女子大学)

1 本研究集会の目的

非可換（量子）確率論は、数理物理学、作用素環論、確率論、表現論、組合せ論、函数論、量子ウォーク、直交多項式論・特殊関数論など、多岐にわたる分野と深く関連する領域であり、近年著しい発展を遂げています。本研究集会では、非可換確率論の理論的枠組みのさらなる発展を目指すとともに、上述の関連諸分野との新たな接点を開拓することを目的としました。また、既に確立された理論を基盤として未解決課題を整理し、その解決に向けた議論を深めるとともに、非可換確率論の視点が、将来的にAI分野における機械学習の理論的検討に寄与し得る可能性について、基礎的課題の提示や初步的な検討を行うことも意図しました。さらに、国内において非可換確率論とその関連分野の研究者が一堂に会する機会は必ずしも多くの現状を踏まえ、本共同利用初年度においては、その交流の場を提供し、若手研究者を含む幅広い世代の研究者間での対話を促進することで、今後の人的ネットワーク構築に向けた種まきとなる試みを行い、当該研究分野の一層の活性化を図ることを目指しました。

2 プログラムと講演概要

本研究集会では、非可換確率論の専門家ののみならず、先に述べた関連諸分野の専門家にも講演を依頼しました。講演概要は以下のとおりです。なお、*印のある講演者は大学院生です。また、本研究集会の情報はウェブ上でも公開されており、以下のURLからご覧いただけます。

- <https://joint.imi.kyushu-u.ac.jp/post-18134/> (日本語)
- <https://joint.imi.kyushu-u.ac.jp/post-19726/> (英語)
- <https://sites.google.com/view/ncprt-2025> (日本語)

10月8日（水）

10:00～10:50 廣島 文生（九州大学）

The weak coupling limit of the Pauli-Fierz model

We investigate the weak coupling limit of the Pauli-Fierz Hamiltonian within a mathematically rigorous framework. Furthermore, we establish the asymptotic behavior of the effective mass in this regime.

11:00～11:50 辻本 裕紀*（九州大学）

The evaluation of the spatial decay of the ground state of the Pauli-Fierz model from below

In this talk, we evaluate the spatial decay of the ground state Ψ_0 of the Pauli-Fierz Hamiltonian from below by using a path integral method. The evaluation from above is known, but it from below is not known and non-trivial. It can be obtained by using photon number rotations Θ and a geodesic distance. As a result, the order of the spatial decay of the ground state Ψ_0 is determined.

昼休み

13:30～14:20 Cid Reyes Bustos (NTT 基礎研)

Symmetry and degeneracy for the two photon asymmetric quantum Rabi model

The quantum Rabi model is one of the fundamental models to describe the interaction of light and matter in quantum optics. The interests of the model transcends physics

and its properties, including the time evolution (heat kernel), spectral degeneracy, and asymptotics of eigenvalues have been studied from the point of view of mathematics in recent years. In this talk, we describe the relation of the spectral degeneracy and the existence of symmetry operators for the two photon asymmetric quantum Rabi model, which results on a geometric picture for the spectrum.

14:30 ∼ 15:20 伊藤 久優雅* (名古屋大学)

***B*-valued semi-circular system and the free Poincaré inequality**

Free probability was initiated by Voiculescu in the study of the free product of operator algebras. In his paper where free independence was introduced, Voiculescu proved the free probabilistic central limit theorem. The limit distribution is the semi-circular distribution, and thus it is regarded as a free probabilistic counterpart of Gaussian distribution. The free Poincaré inequality is a kind of Poincaré inequality with replacing the differential operator with a certain "free probabilistic differential operator". We will characterize *B*-valued semi-circular system in terms of the free Poincaré inequality. This is the *B*-valued free probabilistic analogue of Biane's characterization of (\mathbb{C} -valued) semi-circular system and also a non-commutative analogue of Borovkov-Utev's characterization of Gaussian system by Poincaré inequality.

15:40 ∼ 16:30 佐藤 僅亮 (北海道大学)

Conservation operator processes from asymptotic representation theory and their CLT

In this talk, we examine applications of the theory of operator-valued processes to algebraic methods in probability theory. In particular, we analyze the asymptotic behavior of conservation operator processes, which are defined on a symmetric Fock space, derived from unitary groups and quantum unitary groups as their rank tends to infinity.

16:40 ∼ 17:30 青山 天馬* (東京大学)

Segal-Shale-Weil 表現の変形と一般化平行移動作用素

Segal-Shale-Weil 表現は、Schrödinger モデルと呼ばれる実現を通して、古典的調和解析に現れる基本的な操作(フーリエ変換・熱半群・ガウス関数・平行移動など)に、表現論的な再解釈を与えることが知られている。本講演では、これに倣い、ランク 1 の場合の Segal-Shale-Weil 表現の 1 パラメータ変形の具体的な実現をもとに、一般化された平行移動作用素を定義・計算し、それが、普通の意味での平行移動作用素と、Legendre 関数を用いて明示的に記述できるということを報告する。

10月9日 (木)

9:30 ∼ 9:50 津島 萌唯* (北海道大学)

Free Products and Free Independence in Free Probability

In this talk, I will explain the definitions of free independence and free products, and present some properties I am currently learning about them.

10:00 ∼ 10:50 植田 優基 (北海道教育大学)

Convolution formula of Meixner-type free gamma distributions

Free probability theory, introduced by Voiculescu, is known to have a deep connection with classical probability theory through random matrix theory. There exist several ways to describe the correspondence between the two theories, but these descriptions generally do not coincide. Representative examples include the Bercovici–Pata bijection

and correspondences based on orthogonal polynomial systems. In recent years, a new type of correspondence, called the potential correspondence, has attracted attention. This correspondence plays an essential role in Voiculescu's free entropy.

In this talk, we define a generalized Meixner-type free gamma distribution as a generalization of the free gamma distribution introduced by Anshelevich. We report on its distributional properties and convolution formulas. Furthermore, we construct the framework of the potential correspondence for this class of distributions and examine the convolution formulas of the corresponding class of distributions on the classical probability side. This is joint work with Noriyoshi Sakuma (Osaka University).

11:00 ~ 11:50 長谷部 高広 (北海道大学)

S-transform of arbitrary probability measures on the real line

Free multiplicative convolution is the distribution of the product of two free selfadjoint operators, one of which is assumed to be positive. To compute free multiplicative convolution, S-transform has been a useful machinery. The S-transform was first defined by Voiculescu for measures with compact support with nonzero mean, and then generalized to some unbounded support cases by several authors. Recently, we successfully gave a definition of the S-transform of arbitrary probability measures, which satisfies desirable properties. This talk is based on a joint work with Octavio Arizmendi and Yu Kitagawa.

昼休み

13:30 ~ 14:20 早瀬 友裕 (CoeFont)

Free Random Projection for In-Context Reinforcement Learning

本講演では、文脈内強化学習における汎化性能向上を目的として、Free Random Projection という入力マッピング手法を紹介します。既存のランダム射影は、階層的な構造を捉えることが難しいという課題がありましたが、FRP は自由確率論に基づき、階層構造を自然に符号化することでこの課題を克服します。これまで、強化学習や自然言語で双曲幾何を使った階層性表現はありましたが、FRP はこれを自由群で置き換えたものです。(非可換確率論向けに、強化学習の知識は仮定せずに話します。)

14:30 ~ 15:20 Benoit Collins (京都大学)

Operator norm estimates for crossing matrix variants of conditional cumulants

The operator norm of free conditional cumulants can be evaluated through the fact that it is an iteration of CP maps. Here, we consider a non-crossing variant and obtain sharp bounds for the operator norm. These quantities appear naturally in unitary matrix valued Weingarten calculus. This is based on joint work with Wangjun Yuan.

15:40 ~ 16:30 松本 詔 (鹿児島大学)

Weingarten calculus with virtual isometry

Bourgade-Najnudel-Nikeghbali は、ユニタリ群の列の射影極限である virtual isometry という概念を導入した。その研究で、 $(n-1)$ 次の Haar ユニタリ行列から n 次 Haar ユニタリ行列を構成する手法を与えていた。さて、お馴染みの Weingarten calculus は Haar ユニタリ行列の行列成分のモーメントを計算する。virtual isometry の考え方を用いて、Weingarten calculus を発展させよう。Benoit Collins (京都大) との共同研究。

16:30 ~ 17:10 村木 尚文 (岩手県立大学)

Braided probability

I will talk about my program on constructing new notions of independence (universal products in a certain sense) from quantum invariants of links. In preliminary calculations it seems that this idea works well. But I did not yet check the details of the story. So

up to now this is only a speculation (a fantasy). If the idea works well, we obtain a new notion of independence, which I call the braided independence, for each braided subfactor of finite index and finite depth.

10月10日（金）

9:30～9:50 會田 晏己*（北海道大学）

Asymptotic Behavior of Higher Airy Functions and Multicritical Limits of the Shifted Schur Measure

高次 Airy 関数は p 階 ODE $y^{(p)} - xy = 0$ の解として定まる。高次 Airy 関数から Fredholm 行列式を用いて得られる分布は高次 Tracy–Widom 分布と呼ばれる。Schur 測度を入れたランダム分割のギャップ確率のスケール極限は、高次 TW 分布に収束することが示されており (Kimura–Zahabi (2020, 2022), Betea–Bouttier–Walsh (2024))、Schur 測度は高次 TW 分布が与えるユニバーサリティクラスに属することが知られている。本講演では、高次 Airy 関数が無限遠で指数減衰することを鞍点法を用いて示したのち、その応用として、shifted Schur 測度を入れたランダム分割のギャップ確率のスケール極限が、高次 TW 分布に収束することを示す。なお、 $p = 2$ (通常の Airy 関数) の場合はすでに示されている (Matsumoto(2005))。

10:00～10:50 三木 啓司（同志社大学）

直交多項式による連続時間量子ウォークの解析ならびに拡張

完全状態転送や Fractional Revival といった現象は量子通信の分野で重要な概念であり、これらはスピン鎖模型やグラフ上の連続時間量子ウォークにより再現される。本講演では、1 次元のスピン鎖、すなわち path 上の量子ウォークモデルが直交多項式により対角化されることを紹介し、直交多項式の様々な拡張を考えることで、2 次元以上の系にも拡張できることを述べる。特に、1 次元の系では見られない現象を起こすモデルについて紹介したい。

11:00～11:50 香取 真理（中央大学）

Radial multiple SLE and circular Dyson BM in the hydrodynamic limit

The circular Dyson Brownian motion (BM) defined on a unit circle \mathbb{S} is a variant of the Dyson BM on \mathbb{R} . Its hydrodynamic limit is given by the time-dependent probability measure μ_t on \mathbb{S} , whose circular Stieltjes transform solves the inviscid complex Burgers equation on \mathbb{S} . The radial multiple Schramm–Loewner evolution (SLE) in a unit disk \mathbb{D} driven by the circular Dyson BM was studied by Hotta and Schleißinger (2021), and its hydrodynamic limit was formulated as a radial Loewner chain driven by μ_t . In the present talk we will report an explicit description of the hydrodynamic limit of the radial multiple SLE started from a single source at $z = 1$, which will be regarded as a radial extension of the previous result in the chordal case (Hotta–Katori 2018). We will show that the system exhibits a novel transition at time $t = 1$, where topology of the SLE hull is changed and a critical phenomenon is observed in the edge behavior of the SLE-hull boundary. In a recent study, we proved that coupling between the radial multiple SLE and the Gaussian free field on \mathbb{D} is established if and only if the former is driven by the circular Dyson BM. That is, the circular Dyson BM is chosen as a unique family of driving processes for radial multiple SLE. In the hydrodynamic limit, we study the correspondence between the time-evolution of $\text{supp } \mu_t$ on \mathbb{S} and the motion of SLE-hull boundary in $\overline{\mathbb{D}}$. This talk is based on the joint work with Shinji Koshida (Aalto Univ.), Chizuru Soukejima (Chuo Univ.), and Raian Suzuki (Chuo Univ.).

3 本研究で得られた成果

本研究集会には、講演者を含む35名が参加し、その内訳は大学所属研究者20名、大学院生12名、産業界からの参加者3名であった。多様な背景をもつ研究者が一堂に会したこと、非可換（量子）確率論および関連諸分野・領域における課題の共有と掘り起しが進むとともに、分野や世代を横断した議論と交流が生まれました。

本研究集会はIMI共同利用の初年度であることを踏まえ、各講演者は最新の研究成果の解説にとどまらず、関連諸分野の研究者にも十分分配慮した基礎的内容や歴史的背景を適宜盛り込んだ講演がなされました。非可換確率論の研究者による講演では、当該分野が様々な分野・領域の手法を取り入れて発展してきたことを踏まえ、近年の研究成果や新たな展開に関する具体的な報告がなされました。一方、関連諸分野の研究者による講演でも、最新成果だけでなく基礎的事項の丁寧な解説が行われ、各参加者にとって新たな専門的知識の修得および情報収集の有意義な機会となりました。これらを契機に、分野や世代を超えた活発な研究討論や情報交換が自然に行われました。

さらに、いくつかの講演では、研究萌芽期における背景・状況やアイデアの源泉が提示され、理論形成の歴史的背景を直接知ることができる貴重な機会となりました。また、複数の若手研究者からは、普段接点の少ない異分野研究者との議論を通じて、通常は思いも付かない新たな研究課題との接点に気づくことができ、大変有意義であったとの感想も寄せられています。

これら今年度の成果を通じて、初年度の目的の一つであった人的ネットワーク構築に向けた基盤形成を着実に進める機会となり、今後のさらなる研究協力体制の発展に向けた種まきとして、大変意義深いものとなりました。今後、一層充実した研究活動が展開されることが期待されます。

謝辞

本研究集会の実施にあたり、九州大学IMI共同利用制度よりご支援を賜りました。また、会場のご提供や事務手続きにおいて多大なご協力をいただきましたことに、心より感謝申し上げます。さらに、講演者の皆様ならびに参加者の皆様には、活発な議論や温かいご協力を頂戴し、おかげさまで本研究集会を実りあるものとすることができました。深く御礼申し上げます。また、本研究集会は、科学研究費補助金・基盤研究A（課題番号25H00595、研究代表者：廣島文生）の支援を受けて実施いたしました。