2025年度共同利用研究報告書

2026年03月30日

所属・職名 東京学芸大学・自然科学系・教授

山本 卓宏

			整理番号	2025a028
1.研究計画題目	多目的最適化問題の解集合のモデリングのトポロジカルな構造に関する写像を用いた研究			
2.新規・継続	新規			
3.種別	プロジェクト研究			
4.種目	短期研究員			
5.開催方法	対面開催			
6.研究代表者	氏名	山本 卓宏		
	所属部局名	東京学芸大学・自然科学系	職名	教授
7.研究実施期間	2025年10月06日(月曜日)～2025年10月10日(金曜日)			
	2026年02月16日(月曜日)～2026年02月20日(金曜日)			
8.キーワード	連続写像，単体写像，ファイバー特異点，特異ファイバー			
9.参加者人数	8人			

10.本研究で得られた成果の概要

本研究において，まず，閉曲面 Mから平面へのPL写像に正則点及び特異点を定義した．さらに，曲面間の可微分写像の特異点の振る舞いに基づいて，Mから平面へのPL写像にジェネリックという概念を導入し，任意の PL写像はジェネリックなPL写像で近似できることを示した．ここまでの内容について，RIMS共同研究「可微分写像の特異点論とその応用」にて講演し，内容をまとめたものを講究録に投稿した．この結果をさらに発展させた内容の論文を学術雑誌に投稿予定である．さらに，一般の多面体 Mから ¥R^mへのPL写像 (n ¥geq m) に対して定置折り目辺単体を定義した．
次に，強凸写像 f¥colon ¥R^n ¥to ¥R^m (n¥geq m)に関する最適化問題について，解空間 X^¥ast(f)がいつ (m-1)次元単体と同相になるのかという問題を研究した．一般に，強凸な fに対して (m -1)次元単体から解空間への全射な連続写像 x^¥astが存在するがこれが単射とは限らない．そこで，x^¥astの１点の逆像による(m -1)次元単体の分割を考えるとき，各逆像を１点に潰して得られる商空間は解空間に同相となる．この分割がある位相的な条件を満たせば商写像が同相写像となることが分かった．分割に対する位相的な条件の最適化問題における意味を考察することは今後の課題である．
次に，PL写像に関する最適化問題について研究を行った．最適化問題の先行研究では写像が強凸であるという仮定が重要となる．今回の研究では，強凸を約束しないときに解空間のトポロジーに関して何がわかるのかということを PL写像を用いることで研究した．PL写像 ¥varphi_i ¥colon ¥R^n ¥to ¥R^m (n ¥geq m)の各成分が最小点をただ１つ持つと約束する．ここで，PL写像を考える場合，最適解が定置折り目辺単体に属するという性質により，最適解の位置が絞り込めることに注意する．このとき，先のようなPL写像に関する最適化問題においては ¥Delta^{m -1}の頂点の周りから最適解集合の対応する頂点の周りへの全射な連続写像が存在することが分かった．この研究をさらに発展させて論文を執筆する予定である．

多目的最適化問題の解集合のモデリングのトポロジカルな構造に関する写像を用いた研究

山本卓宏 [1]

1　はじめに

研究課題「多目的最適化問題の解集合のモデリングのトポロジカルな構造に関する写像を用いた研究」にて，２０２５年１０月６日–１０日，２０２６年２月１６日–２０日の期間で IMI 短期研究員を行なった．研究目的は，可微分写像の特異点論をもとに可微分とは限らない写像に特異性を定義すること，そして，写像の特異性に基づき写像に関する最適化問題の単体性を研究することである．特に，本研究では PL 写像に注目した．前半の５日間では閉曲面から平面への PL 写像に正則点及び特異点を導入し，ジェネリックな PL 写像を研究した．後半の５日間では強凸 C^0 写像 $f = (f_1, \dots, f_m)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の単体性，及び凸 PL 写像 $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)\colon (\mathbb{R}^n, \mathcal{K}) \to \mathbb{R}^m$ に関する最適化問題の解集合について研究した．

第２節で前半の５日間，第３節で後半の５日間で得られた成果を報告する．

2　閉曲面から平面への PL 写像の特異点

閉曲面 M の単体分割 $\mathcal{K}$ を考える．このとき，$\mathcal{K}$ の頂点全体からなる集合 $V(\mathcal{K})$ 上の写像 $\varphi\colon V(\mathcal{K}) \to \mathbb{R}^2$ を区分線形拡張することにより多面体 $M = |\mathcal{K}|$ 上の連続写像 $\varphi_M\colon M \to \mathbb{R}^2$ が誘導される．M に単体分割 $\mathcal{K}$ が指定されていることを明示し記号を省略して $\varphi\colon (M, \mathcal{K}) \to \mathbb{R}^2$ とかく．閉曲面上の PL 写像の具体例については [5] を参照する．

定義 2.1 (PL 写像の正則点と特異点)**.** $\varphi\colon (M, \mathcal{K}) \to \mathbb{R}^2$ を閉曲面 M 上の PL 写像とする．

(0) 2-単体 $|a\ b\ c| \in \mathcal{K}$ が φ に関して**正則**であるとは，$\mathbb{R}^2$ 上の点 $\varphi(a)$, $\varphi(b)$, $\varphi(c)$ が一般の位置にあるときをいう．そうでないとき，2-単体 $|a\ b\ c| \in \mathcal{K}$ は φ に関して**特異**であるという．φ に関して正則な 2-単体が与えられたとき，その内部の点を φ の**正則点**と呼び，φ に関して特異な 2-単体の内部の点を φ の**特異点**と呼ぶ．

(1) 1-単体 $|a\ b| \in \mathcal{K}$ が φ に関して**正則**であるとは，$|a\ b|$ を辺単体とする 任意の 2-単体は φ に関して正則であり，かつ，$|a\ b|$ を辺単体にもつ 2-単体を $|a\ b\ c|, |a\ b\ c'|$ とおくとき $\varphi(c)$ と $\varphi(c')$ が $\varphi(a)$ と $\varphi(b)$ を通る直線に関して互いに逆側にあるときをいう．そうでないとき，$|a\ b| \in \mathcal{K}$ は φ に関して**特異**であるという．φ に関して正則な 1-単体が与えられたとき，その内点を φ の**正則点**と呼び，φ に関して特異な 1-単体の内点を φ の**特異点**と呼ぶ．

(2) 頂点 $x \in V(\mathcal{K})$ が φ に関して**正則点**であるとは，x を頂点にもつ任意の 2-単体 $|x\ a\ b|$，1-単体 $|x\ a|$ は φ に関して正則であり，かつ，φ の星状近傍 $\mathrm{Star}_{\mathcal{K}}(x)$ への制限写像がその像への単射であるときである．そうでないとき，頂点 $x \in V(\mathcal{K})$ を φ に関して**特異点**と呼ぶ．

φ の特異点全体からなる集合を $S(\varphi)$ とかく．

注意 2.2. 著者は最近，滑らかさを約束しない写像の特異性に興味がある．逆像のトポロジーに注目することで次の特異性を定義した．多様体の間の連続写像 $\psi\colon M \to N$ に対して，$p \in M$ が **ファイバー正則**/**ファイバー特異**であるとは，写像芽 $\psi\colon (M, x) \to (N, f(x))$ の代表元 $\psi\colon U \to V$ で自明なファイバー束 $V \times F \to V$ と C^0 同値となるものが存在する/存在しないときをいう．定義 2.1 で定義した特異点は全てファイバー特異点である．

[1] 東京学芸大学自然科学系数学講座/Department of Mathematics, Tokyo Gakugei University（184-8501 小金井市貫井北町 4–1–1; yamush@u-gakugei.ac.jp）

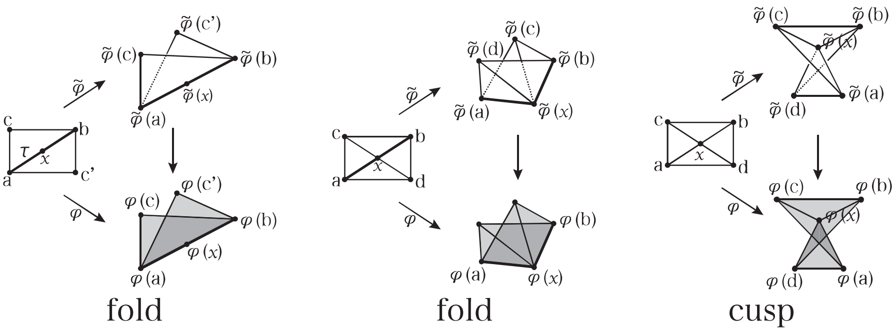

図 1　左：折り目 1-単体，中央：折り目特異点，右：カスプ特異点

定義 2.3 (折り目特異点とカスプ特異点)**.** 閉曲面上の PL 写像 $\varphi\colon (M,\mathcal{K}) \to \mathbb{R}^2$ を考える．

(1) 1-単体 $|a\ b| \in \mathcal{K}$ が φ の**折り目 1-単体**であるとは，$|a\ b|$ を辺単体とする任意の 2 単体が φ に関して正則でありかつ，$|a\ b|$ を辺単体にもつ 2-単体を $|a\ b\ c|, |a\ b\ c'|$ とおくとき，$\varphi(c)$ と $\varphi(c')$ が $\varphi(a)$ と $\varphi(b)$ を通る $\mathbb{R}^2$ 上の直線に関して同じ側にあるときをいう．図 1 左を参照する．折り目 1-単体の内部の点を**折り目特異点**と呼ぶ．
(2) 頂点 $x \in V(\mathcal{K})$ が φ の**折り目特異点**であるとは，x に隣接する折り目 1-単体は 2 つでありかつ，必要であれば x の周りにあるいくつかの正則 1-単体及びそれに隣接する x でない方の頂点を無視する（または，正則 1-単体を追加する）とき，φ が x の周りで図 1 中央に示す単体写像 $\widetilde{\varphi}$ と射影 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ の合成写像に分解できるときをいう．
(3) 頂点 $x \in V(\mathcal{K})$ が φ の**カスプ特異点**であるとは，x に隣接する折り目 1-単体は 2 つでありかつ，必要であれば x の周りにあるいくつかの正則 1-単体及びそれに隣接する x でない方の頂点を無視する（または，正則 1-単体を追加する）とき，φ が x の周りで図 1 右に示す単体写像 $\widetilde{\varphi}$ と射影 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ の合成写像に分解できるときをいう．

定義 2.4 (ジェネリックな PL 写像)**.** 閉曲面上の PL 写像 $\varphi\colon (M,\mathcal{K}) \to \mathbb{R}^2$ がジェネリックであるとは次の条件を満たすときをいう：(1) φ の特異点は折り目特異点かカスプ特異点のいずれかである． (2) 各 $y \in \varphi(S(\varphi))$ に対して, y の $\varphi|_{S(\varphi)}$ による逆像 $(\varphi|_{S(\varphi)})^{-1}(y)$ に含まれる点の個数は 1 または 2 でありかつ, 2 となるときその特異点はそれぞれ折り目特異点であり $\varphi(S(\varphi))$ は y において横断的に交わる．

注意 2.5. ジェネリックな PL 写像 $\varphi\colon (M,\mathcal{K}) \to \mathbb{R}^2$ の特異点は M のトポロジーを反映する．[5] を参照する．

ジェネリックな PL 写像について次が成立する．

命題 2.6. 閉曲面 M 上の PL 写像 $\varphi\colon (M,\mathcal{K}) \to \mathbb{R}^2$ を考える．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ジェネリックな PL 写像 $\varphi'\colon (M,\mathcal{K}') \to \mathbb{R}^2$ で，各 $x \in M$ に対して $\|\varphi(x) - \varphi'(x)\| < \varepsilon$ を満たすものが存在する．ここで，$x, y \in \mathbb{R}^2$ に対して $\|x - y\|$ とは x, y の間の Euclid 距離をあらわす．

一般の PL 写像に対しても特異点を定義することができるが特異点型を定義することは容易ではない．その中でも，像の境界に対応する特異点である定値折り目特異点は次のように一般化できる．

定義 2.7. n 次元単体複体 $\mathcal{K}$ に対して，その多面体 $M = |\mathcal{K}|$ 上の PL 写像 $\varphi\colon (M,\mathcal{K}) \to \mathbb{R}^m$ $(n \geq m)$ を考える．φ による任意の m-単体の像は m-単体であるとする．$(m-1)$-単体 $\sigma = |a_1 \cdots a_m| \in \mathcal{K}$ が**定値折り目単体**であるとは，σ を辺単体に持つ任意の単体 $|a_1 \cdots a_m\ a_{m+1} \cdots a_k| \in \mathcal{K}$ に対して $\varphi(a_{m+1}), \cdots, \varphi(a_k)$ が $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_m)$ が張る $\mathbb{R}^m$ の超平面に関して常に同じ側にあるときをいう．定値折り目辺単体全体からなる和集合を $D(\varphi) \subset M$ と書く．

3　多目的最適化問題

$\mathbb{R}^n$ 上の関数の組 $f = (f_1, \ldots, f_m)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n \geq m)$ を考える．このとき，$f_1, \ldots, f_m$ を同時に最適化する解 $x \in \mathbb{R}^n$ を f の**最適解**と呼び，f の最適解を求める問題を**最適化問題**と呼ぶ．ここで，最適解 $x \in \mathbb{R}^n$ とは，

$y \in \mathbb{R}^n$ で各 $i = 1, \ldots, m$ に関して $f_i(y) \le f(x)$ でありかつ，ある $j = 1, \ldots, m$ に関しては $f_j(y) < f_j(x)$ を満たすものは存在しないもののことを言う．このような解 $x \in \mathbb{R}^n$ を f の**パレート解**（**pareto solution**）と呼ぶ．f のパレート解全体からなる集合を**パレート解集合**（**pareto set**）と呼び $X^*(f)$ と書く．また，空でない部分集合 $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, m\}$ に対して，$f_I = (f_{i_1}, \ldots, f_{i_k})\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ に関する最適化問題を f の**部分問題**と呼ぶ．

定義 3.1 ([2, 3, 4])**.** C^r 写像 $f = (f_1, \ldots, f_m)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(0 \le r \le \infty)$ を考える．このとき，f を最適化する問題が C^r **単体的** (**simplicial**) であるとは，C^r 写像 $\Phi\colon \Delta_{m-1} \to X^*(f)$ で各部分問題 f_I に対して，$\Phi|_{\Delta_I}\colon \Delta_I \to X^*(f_I)$ と $f|_{X^*(f)}\colon X^*(f) \to f(X^*(f))$ が共に C^r 級同相であるときをいう．ここで，Δ^{m-1} とは $(m-1)$-単体 $\{(w_1, \ldots, w_m) \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{i=1}^m w_i = 1, w_i \ge 0\}$ のことであり，空でない $I \subset \{1, \ldots, m\}$ に対して $\Delta_I = \{(w_1, \ldots, w_m) \in \Delta^{m-1} \mid w_i = 0\ (i \notin I)\}$ とおいている．また，f を最適化する問題が C^r **弱単体的**（**weakly simplicial**）であるとは，C^r 写像 $\phi\colon \Delta_{m-1} \to X^*(f)$ で各部分問題 f_I に対して $\phi(\Delta_I) = X^*(f_I)$ が成立するものが存在するときをいう．

3.1 強凸写像に関する最適化問題の単体性

関数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が**強凸**/ **凸**であるとは，ある $\alpha > 0$ で任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$, 任意の $t \in [0,1]$ に対して

$$f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y) - \frac{1}{2}\alpha t(1-t)\|x-y\|^2 \quad / \quad f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y)$$

を満たすものが存在するときをいう．さらに, $f = (f_1, \ldots, f_m)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が**強凸**/ **凸**であるとは, 各 f_i $(i = 1, \ldots, m)$ が強凸/ 凸であるときをいう．

$f = (f_1, \ldots, f_n)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ が強凸であるとき次が成立する．

定理 3.2 ([2, 3])**.** 強凸 C^r 写像 $f = (f_1, \ldots, f_m)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(1 \le r \le \infty)$ に対して，各パレート解での微分写像の階数が $m-1$ であれば，f に関する最適化問題は，C^{r-1} 単体的である．

定理 3.3 ([4])**.** 強凸 C^0 写像 $f = (f_1, \ldots, f_m)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に関する最適化問題は C^0 弱単体的である．

定理 3.2, 3.3 の証明で重要となるのは，各 $(w_1, \ldots, w_m) \in \Delta^{m-1}$ に関数 $\displaystyle\sum_{i=1}^m w_i f_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ の最小点を対応させる写像 $x^*\colon \Delta^{m-1} \to \mathbb{R}^m$ である．

注意 3.4 ($\sum_{i=1}^m w_i f_i$ に関する補題群 [2, 3, 4])**.** $f = (f_1, \ldots, f_m)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は強凸であるとする．このとき，任意の $(w_1, \ldots, w_m) \in \Delta^{m-1}$ に対して $\sum_{i=1}^m w_i f_i$ は強凸である．強凸 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は最小点をただ 1 つもつ．$\sum_{i=1}^m w_i f_i$ の最小点 $x \in \mathbb{R}^n$ は f のパレート解である．こうして，$x^*\colon \Delta^{m-1} \to X^*(f)$ が定義される．一方，f が凸であるとき，パレート解 $x \in X^*(f)$ はある $(w_1, \ldots, w_m) \in \Delta^{m-1}$ に関する $\sum_{i=1}^m w_i f_i$ の最小点である．よって，x^* は全射である．さらに，x^* は連続である．

一般に，$x^*\colon \Delta^{m-1} \to X^*(f)$ は単射ではない．例えば，[2, Example 3.4] において $f = (f_1, f_2, f_3)\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ に関する最適化問題で $x^*\colon \Delta^2 \to X^*(f)$ が単射ではない具体例が挙げられている．

短期研究員として取り組んだ研究の 1 つは，強凸 C^0 写像に関する最適化問題を考えるとき，その弱単体的問題がいつ単体的問題となるのか，特に，$X^*(f)$ が Δ^{m-1} と同相になるのはいつか，という問題である．まず，次がわかる．

補題 3.5. 任意の $y \in X^*(f)$ に対して $(x^*)^{-1}(y) \subset \Delta^{m-1}$ は凸集合である．

こうして，x^* による Δ^{m-1} の分割 $\mathcal{D} = \{(x^*)^{-1}(y)\}_{y \in X^*(f)}$ の各成分は連結であること，特に単連結であることがわかる．各 逆像 $(x^*)^{-1}(y)$ を 1 点につぶして得られる商空間を $(\Delta^{m-1})_{\mathcal{D}}$ とかく．正確には，$(\Delta^{m-1})_{\mathcal{D}}$ は x^* に関するレーブ空間である．このとき，x^* は全単射な連続写像 $\overline{x^*}\colon (\Delta^{m-1})_{\mathcal{D}} \to X^*(f)$ を誘導する．一方，$\overline{x^*}$ はコンパクト空間からハウスドルフ空間への全単射な連続写像であることに注意すると，$\overline{x^*}$ により $(\Delta^{m-1})_{\mathcal{D}}$ は $X^*(f)$ と同相であることがわかる．よって，先の問題は $(\Delta^{m-1})_{\mathcal{D}}$ が Δ^{m-1} と同相になるのはいつか，という問題が解決できれば解決できることになる．

位相空間 X の部分集合族 $\mathcal{D} \subset 2^X$ で互いに交わらず，和集合が X になるものを X の**分割**と呼び，分割の各成分を 1 点に潰して得られる商空間 $X_{\mathcal{D}}$ のトポロジーに関する理論を**分割空間理論**（**decomposition space theory**）と

呼ぶ [1]．一般に，X が多様体で分割 $\mathcal{D}$ が上半連続（upper semi-continuous）かつ縮約可能（shrinkable）であれば X と $X_{\mathcal{D}}$ は同相となる [1, Theorem 4.4]．強凸写像の $f=(f_1,\ldots,f_m)\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ に関する最適化問題において分割 $\mathcal{D}=\{(x^*)^{-1}(y)\}_{y\in X^*(f)}$ が上半連続や縮約可能であることの最適化問題における幾何学的な意味を考察することは今後の課題である．

3.2 凸 PL 写像に関する多目的最適化問題

PL 写像 $\varphi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)\colon(\mathbb{R}^n,\mathcal{K})\to\mathbb{R}^m$ に関する最適化問題を考える．次が成立する．

補題 3.6. φ に関する最適化問題のパレート解はある定置折り目辺単体に属する．すなわち，$X^*(\varphi)\subset D(\varphi)$.

補題 3.6 により，PL 写像に関してはパレート解集合が全体集合のどのあたりにあるのかを絞り込むことができる．この補題は，可微分写像に関する最適化問題においてパレート解集合が特異点集合（特に定値折り目特異点集合）の部分集合であることに対応する．

PL 写像は強凸写像になることはないので，注意 3.4 の補題群はそのままでは適用でない．しかし，PL 写像 $\varphi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)\colon(\mathbb{R}^n,\mathcal{K})\to\mathbb{R}^m$ が，各 PL 関数 φ_i が唯一の最小点を持つと約束することで次を得る．$(w_1,\ldots,w_m)\in\Delta^{m-1}$ とする．

補題 3.7 ($\sum_{i=1}^m w_i\varphi_i$ に関する補題群)**.** 任意の $(w_1,\ldots,w_m)\in\Delta^{m-1}$ に対して $\sum_{i=1}^m w_i\varphi_i$ は凸であるが最小点が唯一とは限らない．しかし，Δ^{m-1} の各頂点の十分近くでは $\sum_{i=1}^m w_i\varphi_i$ は唯一の最小点を持つ．$\sum_{i=1}^m w_i\varphi_i$ の最小点 $x\in\mathbb{R}^n$ は φ のパレート解である．よって，Δ^{m-1} の各頂点の近傍から $X^*(\varphi)$ への写像 x^* が定義される．一方，φ は凸なので，$x\in X^*(\varphi)$ はある $(w_1,\ldots,w_m)\in\Delta^{m-1}$ に関する $\sum_{i=1}^m w_i\varphi_i$ の最小点である．

こうして次が得られる．Δ^{m-1} に属する点でその座標は i 番目 $(i=1,\ldots,m)$ が 1 でその他は全てゼロであるものを a_i とおく．$a_i\in\Delta^{m-1}$ は頂点である．

定理 3.8. $\Sigma_{i=1}^m w_i\varphi_i$ の最小点を対応させる写像 x^* は Δ^{m-1} の頂点 a_i $(i=1,\ldots,m)$ の近傍 $N(a_i)$ で定義される．特に，x^* は $N(a_i)$ から φ_i の最小点の $X^*(\varphi)$ における近傍への全射連続写像である．さらに，各部分問題 φ_I に対して，$x^*|_{N(a_i)\cap\Delta_I}$ は $X^*(\varphi_I)$ における φ_i の最小点の近傍への全射連続写像となる．

謝辞

This work was supported by Institute of Mathematics for Industry, Joint Usage/Research Center in Kyushu University. (FY2025 Short-term Visiting Researcher “Study of topological structure of solution sets of multi-objective optimization problems by using mapping on the solution sets” (Reference No.2025a028).)

参考文献

[1] B. Kalmar: Decomposition space theory, arXiv:2103.02977.

[2] N. Hamada, K, Hayano, S. Ichiki, Y. Kabata, H. Teramoto: *Topology of Pareto sets of strongly convex problems*, SIAM J. Optim. **30** (2020), no. 3, 2659–2686; MR4154320.

[3] N. Hamada, S. Ichiki, *Simpliciality of strongly convex problems*, J. Math. Soc. Japan 73 (3) 965–982, July, 2021. https://doi.org/10.2969/jmsj/83918391

[4] Y. Mizota, N. Hamada, S. Ichiki, *ALL UNCONSTRAINED STRONGLY CONVEX PROBLEMS ARE WEAKLY SIMPLICIAL*, arXiv:2106.12704v1.

[5] T. Yamamoto: *Apparent contour of simplicial maps of closed surfaces into the plane*, in Japanese, to appear in RIMS Kôkyûroku.

多目的最適化問題の解集合のモデリングのトポロジカルな構造に関する写像を用いた研究

整理番号	2025a028
種別	プロジェクト研究-短期研究員
研究計画題目	多目的最適化問題の解集合のモデリングのトポロジカルな構造に関する写像を用いた研究
研究代表者	山本 卓宏（東京学芸大学・自然科学系・教授）
研究実施期間	2025年10月6日(月) 〜 2025年10月10日(金) 2026年2月16日(月) 〜 2026年2月20日(金)
研究分野のキーワード	連続写像，単体写像，ファイバー特異点，特異ファイバー
本研究で得られた成果の概要	本研究において，まず，閉曲面 Mから平面へのPL写像に正則点及び特異点を定義した．さらに，曲面間の可微分写像の特異点の振る舞いに基づいて，Mから平面へのPL写像にジェネリックという概念を導入し，任意の PL写像はジェネリックなPL写像で近似できることを示した．ここまでの内容について，RIMS共同研究「可微分写像の特異点論とその応用」にて講演し，内容をまとめたものを講究録に投稿した．この結果をさらに発展させた内容の論文を学術雑誌に投稿予定である．さらに，一般の多面体 Mから \R^mへのPL写像 (n \geq m) に対して定置折り目辺単体を定義した． 次に，強凸写像 f\colon \R^n \to \R^m (n\geq m)に関する最適化問題について，解空間 X^\ast(f)がいつ (m-1)次元単体と同相になるのかという問題を研究した．一般に，強凸な fに対して (m -1)次元単体から解空間への全射な連続写像 x^\astが存在するがこれが単射とは限らない．そこで，x^\astの１点の逆像による(m -1)次元単体の分割を考えるとき，各逆像を１点に潰して得られる商空間は解空間に同相となる．この分割がある位相的な条件を満たせば商写像が同相写像となることが分かった．分割に対する位相的な条件の最適化問題における意味を考察することは今後の課題である． 次に，PL写像に関する最適化問題について研究を行った．最適化問題の先行研究では写像が強凸であるという仮定が重要となる．今回の研究では，強凸を約束しないときに解空間のトポロジーに関して何がわかるのかということを PL写像を用いることで研究した．PL写像 \varphi_i \colon \R^n \to \R^m (n \geq m)の各成分が最小点をただ１つ持つと約束する．ここで，PL写像を考える場合，最適解が定置折り目辺単体に属するという性質により，最適解の位置が絞り込めることに注意する．このとき，先のようなPL写像に関する最適化問題においては \Delta^{m -1}の頂点の周りから最適解集合の対応する頂点の周りへの全射な連続写像が存在することが分かった．この研究をさらに発展させて論文を執筆する予定である．
組織委員(研究集会) 参加者(短期共同利用)	山本 卓宏（東京学芸大学・教授）