令和2年度＜若手研究_再公募＞共同利用研究報告書

2021年08月27日

九州大学　マス・フォア・インダストリ研究所長 殿

所属・職名 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所・学術研究員

北澤 直樹

下記の通り共同研究の報告をいたします。

記

		整理番号		20200027	
1.研究計画題目	高次元多様体の世界の幾何的構成的な理解と高次元データへの応用				
2.新規・継続	新規				
3.種別	若手研究				
4.種目	短期共同研究				
5.研究代表者	氏名	北澤 直樹			
	所属部局名	九州大学マス・フォア・インダストリ研究所	職名	学術研究員	
6.研究実施期間	2021年07月12日(月曜日)～2021年07月15日(木曜日)				
7.キーワード	可微分写像の特異点論、多様体の代数トポロジー、多様体の微分トポロジー、Fiber Topology、機械学習、可視化				
8.参加者人数	37人				

9.本研究で得られた成果の概要

第四次産業革命は、いわゆる”ビッグデータ”を多く生むようになった。データの集まりは、空間の中の点の集まりとみなせる。中でも、工業製品設計などで、3 次元の部分空間に収まらず可視化がそのままではできないようなものを扱う必要が多く出てくるようになった。データの解析で重要な数学的手法として、射影(例えば主成分分析)やフィッティング(例えば多様体学習等)がある。これらは低い次元のデータセットには有効だが、高い次元では限界がある。
高次元のデータの解析方法の確立を目指し、研究代表者が開拓してきた

高次元の図形(多様体)を低次元空間への具体的な良い可微分写像で射影写像することを通してみ、調べるという手法

を検討し可能性を探ろうと本研究プロジェクトは創設された。この手法は、多様体上の良い可微分関数の特異点をもとに多様体のホモロジーやホモトピー等トポロジーの情報を捉える所謂 Morse 理論やその高次元化といえる、それなりに確立され発展している幾何学の手法が原点にある。高次元の複雑な空間を幾何的構成的に理解するという、重要な未開拓の難題に応用しようと進めている。
確立まではまだ距離があるものの、成果として以下の重要な問題が開拓された。

1多目的最適化問題の難易度やランク付けに、写像の逆像の連結成分を 1 点に圧縮することで得られる空間である Reeb 空間のトポロジーの情報を活用する。
2 Fiber Topology は、前述の Reeb 空間を用いてデータのつながりを大まかに捉えることで可視化解析しようというものである。1・2 次元の Reeb 空間で済ませている部分を高次元化したり、逆像の幾何的情報を残せるような手法を開拓する。
3 1・2 の問題や他の数学の手法が適用されるような問題を発見発掘する。また、実問題に一連の手法が応用できるか検討する。

IMI 若手研究-短期共同研究「高次元多様体の世界の幾何的構成的な理解と高次元データへの応用」(20200027)
報告書

北澤 直樹 (研究代表者)

1. 本プロジェクトについて.

第四次産業革命, 情報技術の発展は, 多くのデータ (の集まり) を生むようになった. 多くは" ビッグデータ" と呼ばれる非常に規模の大きなものである. これらを解析するのに, 機械学習, それに支えられる AI は強力で不可欠なものである. そしてそれを支えるのは図形や空間, あらゆる現象を数値的量的に, 理論的に表現できる自然科学の基礎言語「数学」である.

データやその集まりは, 決まった次元の空間内の点や集まりで表現できる. その中で, 3 次元以下の低次元の部分空間に沿っているものも少なくはなく, それらに関してはいわゆる主成分分析等にあらわれるような射影, またデータから曲面やそれに適合する良い空間 (多様体) を見つけ出してとらえることで, それなりに解析できる. 一方, 近年, 工業製品設計等で, 高次元の空間でないと収まらないようなデータも多く扱われるようになった. このようなものを扱う強力な手法がないというのが現状である.

今回, 研究代表者の

高次元の空間 (多様体) を低次元の空間に良い可微分写像で射影写像して捉える.

という, 萌芽的な幾何学の一研究を活用しようという目的の下, 本プロジェクトは立ち上がった.

2. 成果.

初日二日目を公開日とし, 以降は, 情報科学系, 工学系から, 「櫻井 大督　氏」「濱田 直希　氏」「藤井 彬人 氏」「Likun Liu 氏」が応用の立場から問題の紹介をされ, 数学側で「佐伯 修 氏」と研究代表者が数学面でのサポートや数学側でできそうなことの検討を行った.

結果, 手法の確立とまでは至らずとも, 多くの重要で興味深い問題が掘り出せた. 大きなものは以下の三点である.

(1) (濱田氏が主体となってまとめあげられた問題.)
Reeb 空間という, 写像の逆像からなる空間のトポロジーに関する情報で, 多目的最適化問題の難しさの評価やランク付けを行う.

(2) (櫻井氏, 藤井氏, Liu 氏 が主体となってまとめ上げられた問題.)
"Fiber Topology" の手法, Reeb 空間を活用して高次元のデータ (から自然に出てくる高次元の形) のつながりをみることでデータを可視化解析しようという手法は, 一定の成果を収めている. 一方, 「逆像のトポロジー等をも考慮した手法等に関する研究」は, 現時点で殆ど未開である. これらについて, 関連して数学側で「可微分写像の幾何学的理論」を発展させ, 計算機科学, 工学側で 「逆像の" かたち" も考慮した Reeb 空間の計算方法」を発展させる.

(3) (高橋氏が主体となってまとめ上げられた問題.)
応用の問題で, (1) や (2) の手法や他の数学の手法が適用されそうな問題を検討する.

他にも, 数学情報科学工学とあらゆる分野の議論を実施した. 次節で, 数学用語の定義, 数学的により詳細な説明等もはさみながら, 紹介する.

3. 問題の詳説や行った議論.

数学用語に関しては, 必要や状況に応じ触れるが, 詳しくは参考文献のいくつかを参照にするとよい.

多様体に関する重要な書籍として, [21], より進んだ内容として [35] を挙げる. 位相多様体, C^r 級構造 (可微分構造) と C^r 級 (可微分) 多様体, C^r 級 (可微分) 写像とその微分, C^r 級'(可微分) カテゴリー, 埋め込み, はめ込み, 微分同相 (写像), 部分多様体, 閉多様体, 閉部分多様体, 連結和, 多様体の向きやスピン構造, $\cdots$ 等といった多様体に関わる基本的な概念についてはこれらを参照にするとよい.

初歩の (代数的・組み合わせ的) トポロジー例えば単体, 単体複体, 多面体, 単体写像, PL 写像, PL カテゴリー, PL 多様体, ホモロジー群, コホモロジー群 (環), 基本群, 単連結性等については, 一通り系統的に関連した内容が扱われている和書として [36], 洋書として [2], 組み合わせ的な部分に関しかなり詳細な部分まで扱っている [6] 等を参照のこと.

3.1. 折り目写像と定義域多様体 (研究代表者の研究紹介). 以下, 多様体やその間の写像は C^{∞} 級つまり無限階微分可能, 滑らかなものを考える. 以下, 研究代表者の講演させて頂いた内容, 関連した自身の HP (https://naokikitazawa.github.io/NaokiKitazawa.html) にある
https://naokikitazawa.github.io/KenkyuNaokiKitazawaJapanese.html
からアクセスできる [16] を参考に, 今回の共同研究の柱にある数学理論を説明する. まず, 滑らかな写像の特異点とは, 微分の階数が定義域値域双方の次元より低くなるような定義域の点であることに一応触れておく. 折り目写像を定義する.

Definition 1. 境界のない m 次元多様体から境界のない n 次元多様体への滑らかな写像 f が, 各特異点 p で整数 $0 \leq i(p) \leq \frac{m-n+1}{2}$ があり, f が適切な座標下で $(x_1, \cdots, x_m) \mapsto (x_1, \cdots, x_{n-1}, \sum_{k=n}^{m-i(p)} {x_k}^2 - \sum_{k=m-i(p)+1}^{m} {x_k}^2)$ の型で表されるとき, 折り目写像 (fold map) であるという.

$n = 1$ で値域が実数全体の空間の場合が所謂 Morse 関数である. Morse 関数については, [23] や [24] が微分トポロジーの第一人者 Milnor による有名な著書であり, [35] 等にも説明がある. 折り目写像について, 初期の研究は [39] そして [37] があり, ここで挙げるような, 多様体の代数トポロジー微分トポロジーに関連した初期の研究には, 例えば [27] や [28] 等がある. 関連して, [1] は, 所謂可微分写像の特異点の理論に関する, 基本的事項から進んだ内容までを説明したテキストである.

研究代表者の研究は, 主に, 次元 2 以上の球面やその直積を最も簡単なものとして含むようなクラスである, (高次元, 主に 5 次元以上で次元の高さ故自由度が高い,) 単連結な閉多様体いわゆる境界のないコンパクトな多様体を, 具体的に良い可微分写像の構成を介して幾何的構成的にみていくというものである. 空間が単連結であるとは, 連続的に 1 点に縮められないようなループがないことを意味する, (整係数) ホモロジー群は、穴を整数の群やその自然な一般化である" 足し算" からなるような代数で表現したものである. ユークリッド空間や球体は, 次元 2 以上の球面同様単連結で, 整係数ホモロジー群について, 所謂連結性を表す事実, "0 次の部分が整数のなす群と同型になること" を除けば自明である.

”単連結な 3 次元閉多様体が球面に同相になる” という, Poincaré 予想 (の高次元版といえる問題) を解いていく過程で, 次元の高さゆえの自由度の高さというものが効果的に働いて代数的, 抽象的に理解され, ある意味で終わったとされる世界である (最近でも代数的でありながらもある程度具体的といえる状況でより深く考察した [20] や [38] 等の研究はある: 7 次元が注目されているのは [22] における 7 次元の単位球面と同相だが微分同相ではないような可微分多様体の発見に始まる). 一方で何もわかっていないと考えられる, この世界の幾何的構成的側面を明らかにしていきたいというのが, 研究代表者の研究の動機である.

以下で自身の研究について述べる. まず基本的な用語や記法をいくつか説明する.

最初に最も基本的な多様体とそれを表す記法等を紹介する. $\mathbb{R}^k$ で k 次元ユークリッド空間を表す. 各点 x について $||x|| \geq 0$ でその点と原点 0 の間の自然な距離を表す. $S^k := \{x \in \mathbb{R}^{k+1} \mid ||x|| = 1.\}$ で $\mathbb{R}^{k+1}$ 内の k 次元単位球面, $D^k := \{x \in \mathbb{R}^k \mid ||x|| \leq 1.\}$ で $\mathbb{R}^k$ 内の k 次元単位球体を表す.

二つの可微分多様体の間の可微分であるような同相写像が特異点をもたないとき, 微分同相写像であるという. 二つの多様体の間に微分同相写像が存在するとき, 二つは可微分多様体として同相つまり微分同相であると定義する. 可微分多様体 X 上のコンパクトな可微分多様体 F をファイバーとするような滑らかな束とは, 逆像が F と微分同相な, 特異点を有さない X への全射な可微分写像を表すこととする: 可微分多様体の直積の射影の自然な一般化といえる可微分写像からなるクラスの可微分写像である. 束に関する一般論は [25] や [34] を参考にするとよい. 連結和とは, 可微分多様体に滑らかに埋め込まれた自身と同じ次元の単位球体の内部を取り除き境界同士を自然な微分同相写像で同一視し貼り合わせて可微分多様体を得る操作のことをいう.

Definition 2 ([8], [9].). $m > n \geq 1$ を整数, M を m 次元連結閉多様体とする. 折り目写像 $f : M \to \mathbb{R}^n$ が以下を満たすとき 同心円形(round) であるという.

(1) $n = 1$, $f|_{S(f)}$ が埋め込みで, 逆像が特異点を持たないような値域の点 $a \in \mathbb{R}^n$ と微分同相写像の組 $(\Phi : f^{-1}((-\infty, a]) \to f^{-1}([a, \infty)), \phi_M : (-\infty, a] \to [a, \infty))$ で $f|_{f^{-1}([a,\infty))} \circ \Phi = \phi_M \circ f|_{f^{-1}((-\infty,a])}$ を満たすようなものがある.
(2) $n \geq 2$, $f|_{S(f)}$ は埋め込みで. $\mathbb{R}^n$ 上の微分同相写像 ϕ, 整数 $l > 0$ で $\phi(f(S(f))) = \{||x|| = r \mid r \in \mathbb{N}, 1 \leq r \leq l\}$ を満たすようなものがある.

Remark 1. Definition 2 で, $n = 2$ のケースでの ϕ について, $n = 1$ の方でも同様のものが取れる.

後で紹介する FIGURE 4 にあるような Morse 関数や FIGURE 5 の折り目写像等を自然に含むクラスといえる. [26] 等にも関連する話があるが, 閉可微分多様体について, 特異点を丁度 2 個有するような Morse 関数の存在と, 4 次元でない球面または 4 次元の単位球面と微分同相であることと同値である. 所謂 Reeb の定理として知られている古典的な重要事実である.

Definition 3. $m > n \geq 1$ を整数, M を m 次元連結閉多様体, $f : M \to \mathbb{R}^n$ を同心円形折り目写像とする.

(1) $n = 1$ であるか, $n \geq 2$ であり, $\mathbb{R}^n$ 上の微分同相写像 ϕ と整数 $l > 0$ で $\phi(f(S(f))) = \{||x|| = r \mid r \in \mathbb{N}, 1 \leq r \leq l\}$ となるものについて, $\phi \circ f$ の $(\phi \circ f)^{-1}(\{||x|| = r \mid \frac{1}{2} \leq r\})$ への制限と $x \mapsto \frac{1}{||x||}x$ により定義される写像の合成が単位球面上の自明な滑らかな束の構造を与えるとき, f は大域的に自明なモノドロミーを持つという.
(2) $n = 1$ であるか, $n \geq 2$ であり, $\mathbb{R}^n$ 上の微分同相写像 ϕ と整数 $l > 0$ で $\phi(f(S(f))) = \{||x|| = r \mid r \in \mathbb{N}, 1 \leq r \leq l\}$ となるものについて, $\phi \circ f$ の $(\phi \circ f)^{-1}(\{||x|| = r \mid k - \frac{1}{2} \leq r \leq k + \frac{1}{2}\})$ への制限と $x \mapsto \frac{1}{||x||}x$ により定

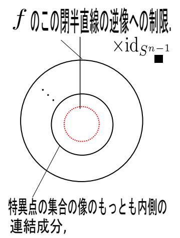

FIGURE 1. 大域的に自明なモノドロミーを持つような同心円形折り目写像の (特異点の集合の) 像他. 赤で囲まれた円の内部を除いた部分の逆像に写像を制限すると Morse 関数と円周 (により表される $n-1$ 次元の単位球面と微分同相な球面) の上の恒等写像の直積とみなせる: 実はこれはかなりごまかしてしまっているが, 非常に難しいところであり, そして, 直積と考えて問題ない.

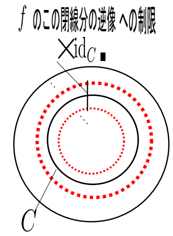

FIGURE 2. 連結成分ごとに自明なモノドロミーを持つような同心円形折り目写像の (特異点の集合の) 像他. 赤い 2 つの円周で囲まれた部分の逆像に写像を制限すると Morse 関数と円周 C (により表される $n-1$ 次元の単位球面と微分同相な球面) 上の恒等写像の直積とみなせる: 実はこれはかなりごまかしてしまっているが, 非常に難しいところであり, そして, 直積と考えて問題ない.

義される写像の合成が各 $1 \leq k \leq l$ で単位球面上の自明な滑らかな束の構造を与えるとき, f は 連結成分ごとに自明なモノドロミーを持つという.

Theorem 1 ([7], [8], [11] 等.)**.** $m > n \geq 1$ を整数とし. M を $(m-n)$ 次元単位球面をファイバーとするような S^n 上の滑らかな束の全空間として表される多様体の $l-1 \geq 0$ 回の連結和の繰り返しで得られる多様体であるとする. このとき, 連結成分ごとに自明なモノドロミーを持つような同心円形折り目写像 $f : M \to \mathbb{R}^n$ で以下を満たすようなものがある.

(1) 特異点の指数は 1 以下. $n = 1$ のとき特異点の個数は $2(l+1)$ 個. $n \geq 2$ のとき特異点集合の連結成分の個数は $l+1$.
(2) 特異点を含まないような逆像の連結成分は S^{m-n} と微分同相な球面の非交和. 原点の逆像の連結成分数は, (値域が ϕ で変換されているとすると) $l+1$.

Remark 2 ([[7], [8], [11] 等.). Theorem 1 で, " 逆" が, "$m \geq 2n$" か "$l = 1$ で同心円形折り目写像が大域的に自明なモノドロミーを持つ" ときは成立.

後の FIGURE 5 の例を含むような適切なクラスの写像や多様体を考え, 写像の構成や定義域に現れる多様体を考えた結果出てきた話である. 一般に, 特異点を含まないような逆像の連結成分が球面であり, 特異点の指数が 0 か 1 であるとき, 定義域の多様体が, 後で正式に定義する Reeb 空間のトポロジーから, かなりわかる. 同じく後で紹介する [12], [13] で具体的にここで紹介した結果のものを特別なものとして含むように, こういう写像を多く, Reeb 空間とともに構成して得ている. 微分トポロジーの観点から意味のある例も出てくる. 一方, 例えば, 定義域の次元が値域の次元より

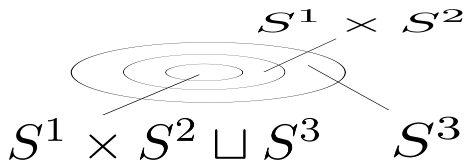

FIGURE 3. Theorems 2 と 3 の写像の像 (特異点全体の集合の像) や逆像の多様体 (の型：値域は $\mathbb{R}^4$).

それなりに高いと, 扱っている多様体は特別なもの, 人工的とみなされがちなものばかりになり得てしまうという問題も起こる.

k 次元 複素射影空間 $\mathbb{C}P^k$ は $2k$ 次元の単連結閉多様体で, 例えば $k=2$ のものの整係数コホモロジー環は $H^2(\mathbb{C}P^2) \cong \mathbb{Z}$ の生成元で生成され, その生成元を 2 乗すると $H^4(\mathbb{C}P^2) \cong \mathbb{Z}$ の生成元となる. スピン多様体とは, " 向きが入る" という性質の高次的な性質にあたるものを満たすような多様体である. 詳しくは省略するが, ユークリッド空間や球面は自然にスピン多様体になること, k 次元複素射影空間で k が奇数のものはそうなるが, 偶数のものはそうならないことに触れておく. [25] 等に関連した内容が説明されている.

Theorem 2 ([17].)**.** 整係数コホモロジー環が $\mathbb{C}P^2 \times S^3$ と同型な 7 次元単連結閉スピン多様体の無限族 $\{M_j\}_{j \in \mathbb{N} \sqcup \{0\}}$ で, 以下を満たすものがある.

(1) M_{j_1} と M_{j_2} は $j_1 \neq j_2$ ならば同相でない.
(2) M_j は $\mathbb{R}^4$ への同心円形折り目写像を持つ.

Theorem 3 ([17].)**.** Theorem 2 で, Wang のプレプリント [38] の結果 (2018) を認めれば, $\{M_j\}_{j \in \mathbb{N} \sqcup \{0\}}$ はすべてのコホモロジー環が $\mathbb{C}P^2 \times S^3$ と同型な 7 次元単連結閉スピン多様体を微分同相であることを法として含むようにできる. さらに

"M_{j_1} と M_{j_2} は $j_1 \neq j_2$ ならば同相でない"

は

"M_{j_1} と M_{j_2} は $j_1 \neq j_2$ ならば微分同相でない"

となるようにできる.

特異点を含まないような逆像の連結成分に, 球面とは限らないものが出てきているのが一つ重要なことである.

3.2. 多目的最適化問題の幾何的構造大域的構造 (一つ目の問題).

X を $\mathbb{R}^m$ 内の領域 (で m 次元の単体複体の構造を与えることができる, つまり高々 m 次元の線分や三角形や正四面体に位相的にうまく分割できるようなもの,) もしくはより一般により高い次元のユークリッド空間内にある, 位相的には m 次元の単体複体の構造を与えることができるような部分空間とする. 適切な写像 $f : X \to \mathbb{R}^n$ を考える. $n=1$ のとき f の最大 (小) 値を与えるような X の点つまり最適解を求める問題が, 所謂 (単目的) 最適化問題である.

$n \geq 2$ であるような問題が, 所謂多目的最適化問題である. このとき, パレート解といわれるものが $n=1$ の場合の最適解の高次元化として重要になる. パレート解全体の集合が, パレート集合, その像はパレートフロントといわれる.

濱田氏の講演, 非公開の部分で, 以下多目的最適化問題の現状が説明された.

(1) 実用上 m は 10000 くらいまでありうる, そして n は 20 くらいまでの値をとりうる.

(2) 一方, 実際には $n \geq 4$ であるような問題, many objective な問題と呼ばれる問題は殆どなく $n \leq 2$ が殆どである. $n \leq 3$ の場合それなりに良い手法はあるが, many objective 問題には, 良い手法がない.

また, 多目的最適化問題において, 最適解パレート解を得るアルゴリズムを作ることは重要で, 計算機科学の世界で様々なコンペもある. そこで重要になるのが, 良い問題 (ベンチマーク問題) である. こういう問題を作ることは, 重要であると同時に難しい. 中でも, 一つ, ベンチマーク問題の作成には, いわゆる "エンジニア" が多く関わっており, 三角関数や多項式関数などの初等関数を自然な方法で組み合わせて問題が作られていく傾向が強い. しかし, これらは問題を複雑にしてしまい, 特に問題の大域的幾何的構造を損ねてしまっているように思えるという指摘があった. そういった悪い点を指摘, 示すものではないが,
http://mikilab. doshisha. ac. jp/dia/research/mop_ga/moga/4/4-1-1. html
等にいくつかベンチマーク問題といえるものの例が挙げられている. ベンチマーク問題の一連の現状が, 「Reeb 空間のトポロジーに関する情報」を問題の難易度やランク付けに利用してみてはという考えにつながるという指摘を頂いた. 関連した応用ができる可能性の高い, 純粋に幾何学, 可微分写像の大域的な幾何的性質そして Reeb 空間の大域的な位相的性質の研究として, [12], [13], [18] 等の研究を行った経験があることに触れる.

Reeb 空間を定義する. 位相空間の間の連続写像 $c : X \to Y$ について, X 上に以下のルールで定義される同値関係が定義される : $x_1, x_2 \in X$ について x_1 と x_2 が同じ逆像の同じ連結成分にあるときかつその時に限り, $x_1 \sim_c x_2$ とする.

Definition 4. このとき商空間 $W_c := X/\sim_c$ が c の Reeb 空間である.

ここで, [26] が Reeb 空間が登場した頃の重要な論文の一つであることに触れておく. 以下基本的な関数と写像の Reeb 空間を紹介しておく. FIGURE 4 は単位球面, 自然に埋め込まれたドーナツの表面に現れるような閉曲面 (トーラス) の高さを考えて出てくるような, 基本的な Morse 関数とその Reeb 空間である : Morse 関数やかなり一般に閉多様体の可微分関数で特異点全体の集合の像が有限集合になるときは, 特異点を含むような逆像の連結成分に対応する点を頂点としたグラフ所謂 Reeb グラフになる ([29]). FIGURE 5 は折り目写像と Reeb 空間の例である. $S^2 \times S^{m-2}$ $(m > 2)$ と微分同相な多様体上の折り目写像である. 特異点の集合の像を円周 2 個で表している. Reeb 空間は, 2 次元の単位球体のコピーに, もう一つ同じ単位球体のコピーを, 前者に滑らかに埋め込まれた円周の上に, 境界の間の適切な微分同相写像を用いて貼り合わせて得られる. 一般に折り目写像やより一般のある程度良い可微分写像の Reeb 空間は, 値域の空間と次元が等しく, 値域と自然に両立するような多面体の構造をもつ ([19] やより一般的な話として [33] を参照のこと).

なお, 我々の議論では, $m > n$ であるようなものを中心的に扱ったことを補足しておく.

3.3. 逆像の "かたち" も考慮した Reeb 空間の理論や計算と Fiber Topology (二つ目の問題). "Fiber Topology" の中で, コンパクトな曲面上の Morse 関数や 3 次元多様体から曲面への折り目写像より一般の良い可微分写像が可視化等への応用で顔を出すこともある ([31] 等). これらで, Reeb 空間は, 逆像の連結成分を 1 点にしてデータの "つながり" をみることを可能にする. 高次元データの可視化でも同様のことは考えられるが, Reeb 空間が 基本的に 1–2 次元の多面体であるようなものを扱い, また逆像のトポロジーの情報等は殆ど保存されない. 研究代表者の研究の文脈に乗せると, 逆像はやや高次元の, せいぜい球面 (や球体の) ような単純な図形として扱われていると考えられる. 逆像を一般化する方向で理論を進めることが, 数学側で重

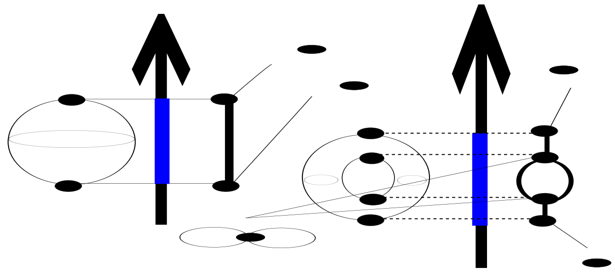

FIGURE 4. 単位球面, 自然に埋め込まれたドーナツの表面に現れるような閉曲面 (トーラス) の高さを考えて出てくるような, 基本的な Morse 関数とその Reeb 空間 (グラフ). 関数やグラフの黒い点は関数の特異点や Reeb グラフの頂点を表す. 多様体や関数の外の, 点や円周 2 つを 1 点で同一視した図形は逆像 (の型) を表す (頂点以外の逆像は円周と微分同相).

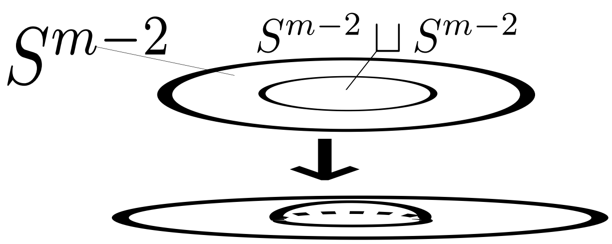

FIGURE 5. $S^2 \times S^{m-2}$ $(m > 2)$ と微分同相な多様体上の折り目写像の特異点の集合の像や逆像や Reeb 空間. 特異点全体の集合は 2 つの円周の非交和でありそこに制限すると埋めこみ. S^{m-2} や $S^{m-2} \sqcup S^{m-2}$ は逆像の多様体 (の型) を表す.

要な問題となる. 応用側でも "つながり" より多くの情報を残し有する, "Reeb 空間と適切な付加情報" を扱えるようにすることが重要な問題となる.

もう一つ, 今回はあまり話題にしなかった関連する問題として, [10] では, 与えられたグラフで, 特異点を持たないような逆像の連結成分が事前に指定した閉曲面になるような, そのグラフを Reeb グラフとしてもたらしてくれる 3 次元閉多様体上の良い可微分関数を構成するという問題を初めて考え扱った. [32] によりはじめられた "1 次元の Reeb グラフの実現問題" について新たな潮流を生み出すものといえ, 例えば [29] に繋がっている. 研究代表者を中心に, 現在も [14] 等具体的問題の設定と解答が出続け, [15] 等新たな一般論に向けた考察もされ出している.

3.4. **応用事例と我々の理論や手法が適用されそうな部分について (三つ目の問題).** 高橋氏の講演で, 応用事例というべき内容が紹介された. 今回は主に, 現実の問題を扱うための数学理論や計算機科学における基礎理論や手法に関する内容が多かった中, 今後理論や手法を発展させながら重きを置いていくべき問題である.

3.5. **その他.** 他にも多くの内容を扱った. 数学理論面では, 微分トポロジーに関する議論を多く実施した. それを紹介する. 例えば, Poincaré 予想に直結する以下の命題について, 数学的な議論を深め直した.

Theorem 4. X を $m>1$ 次元の, 単連結でコンパクトな可微分多様体であるとする. X の整係数のホモロジー群は球体のそれと同型であるとする. さらに $m \neq 2$ のとき X の境界は単連結であるとする. このとき以下が成り立つ.

(1) $m \neq 4, 5$ であれば, X は m 次元単位球体つまり原点を中心とした $\mathbb{R}^m$ 内の半径 1 の球体と微分同相である. PL 多様体としても同様のことが成り立つ.
(2) 任意の $m>1$ で位相多様体としても同様のことが成り立つ.

この内容を扱った最大の理由は, 濱田氏が, この定理や関連する事柄が, 考えている領域, 空間が単体とみなせる, つまり穴がないことを推定する上で応用できる可能性があるということを教えて下さったことである. 詳細は省略するが, 単体とみなせることは, できる限り問題を単純な状況にして扱う上で重要である：例えば前述の多目的最適化問題で, パレート集合, パレートフロントが適当に単体分割できパレート集合の単体が次元を変えないで写像されるような問題は自然で扱いやすい. 関連した数学的結果, 例えば, [3], [4], [5] 等もある.

この議論は, 古典的な微分トポロジーが, 高次元データ解析において多くの可能性を秘めていることを示唆するものと考えられる. 穴を積極的に扱うという話に変わるが, 関連するとされる事柄として, これまでに説明した内容と重複はあるかもしれない, 以下を考えるに至った.

(1) 例えばデータの構造, 詳しくはデータが適合する多様体が, 研究代表者の構成したような写像と適合しているようなものであれば, データの " ホモロジーコホモロジー ..." 等とでもいうべき情報を捕まえられる.
(2) データの各点を中心とする球体を大きくしていくことで, ホモロジー群を代表する穴の生成消滅を捉えて " データのホモロジー" を捉える " パーシステントホモロジー" の理論は強力な手法となっている. コホモロジー環や基本群ホモトピー群等深い代数的情報を扱ったものはあるのか？どうやら全くないようではないらしい. が, 有効性, どの程度市民権を受けているのか受けうるのかは不明である.

References

[1] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Graduate Texts in Mathematics (14), Springer-Verlag (1974).
[2] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, downlodable freely, https://pi.math.cornell.edu/ hatcher/AT/AT.pdf,
[3] N. Hamada, K. Hayano, Y. Kabata, S. Ichiki and H. Teramoto, *Topology of Pareto sets of strongly convex problems*, SIAM Journal on Optimization, 30 , no. 3, pp. 2659–2686 arXiv:1904. 03615.
[4] N. Hamada and S. Ichiki, *Simpliciality of strongly convex problems*, to appear in Journal of the Mathematics Society of Japan, arXiv:1912:09328.
[5] N. Hamada and S. Ichiki, *Characterization of the equality of weak efficiency and efficiency on convex free disposal hulls*, arXiv:1910:02867.
[6] 加藤 十吉, 組合せ位相幾何学、岩波オンデマンドブックス, 岩波書店, 2019/7.
[7] N. Kitazawa, *On round fold maps* (in Japanese), RIMS Kokyuroku Bessatsu B38 (2013), 45–59.
[8] N. Kitazawa, *On manifolds admitting fold maps with singular value sets of concentric spheres*, Doctoral Dissertation, Tokyo Institute of Technology (2014).
[9] N. Kitazawa, *Fold maps with singular value sets of concentric spheres*, Hokkaido Mathematical Journal Vol. 43, No. 3 (2014), 327–359.
[10] N. Kitazawa, *On Reeb graphs induced from smooth functions on 3-dimensional closed orientable manifolds with finitely many singular values*, accepted for publication in Topological Methods in Non-linear Analysis, arxiv:1902. 08841.
[11] N. Kitazawa, *Round fold maps and the topologies and the differentiable structures of manifolds admitting explicit ones*, submitted to a refereed journal, arXiv:1304. 0618 (the title has changed).

[12] N. Kitazawa, *Constructing fold maps by surgery operations and homological information of their Reeb spaces*, submitted to a refereed journal, arxiv:1508. 05630 (the title has been changed).
[13] N. Kitazawa, *Notes on fold maps obtained by surgery operations and algebraic information of their Reeb spaces*, arxiv:1811. 04080.
[14] N. Kitazawa, *On Reeb graphs induced from smooth functions on closed or open manifolds*, arxiv:1908. 04340.
[15] N. Kitazawa, *Maps on manifolds onto graphs locally regarded as a quotient map onto a Reeb space and a new construction problem*, arxiv:1909. 10315.
[16] 北澤 直樹, 非公式スライド, https://naokikitazawa.github.io/General20190926.pdf (2019/9).
[17] N. Kitazawa, *7-dimensional simply-connected spin manifolds whose integral cohomology rings are isomorphic to that of* $\mathbb{C}P^2 \times S^3$ *admit round fold maps*, submitted to a refereed journal, arxiv:2007.03474.
[18] N. Kitazawa *Global topologies of Reeb spaces of stable fold maps with non-trivial top homology groups*, submitted to a refereed journal, arXiv:2105. 12934.
[19] M. Kobayashi and O. Saeki, *Simplifying stable mappings into the plane from a global viewpoint*, Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), 2607–2636.
[20] M. Kreck, *On the classification of* 1*-connected* 7*-manifolds with torsion free second homology*, to appear in the Journal of Topology, arxiv:1805. 02391.
[21] 松本 幸夫, 多様体の基礎, 基礎数学, 東京大学出版会 ,1988.
[22] J. Milnor, *On manifolds homeomorphic to the* 7*-sphere*, Ann. of Math. (2) 64 (1956), 399–405.
[23] J. Milnor, *Morse Theory*, Annals of Mathematics Studies AM-51, Princeton University Press; 1st Edition (1963. 5. 1).
[24] J. Milnor, *Lectures on the h-cobordism theorem*, Math. Notes, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. 1965.
[25] J. Milnor and J. Stasheff, *Characteristic classes*, Annals of Mathematics Studies, No. 76. Princeton, N. J; Princeton University Press (1974).
[26] G. Reeb, *Sur les points singuliers dùne forme de Pfaff completement integrable ou d' une fonction numerique*, -C. R. A. S. Paris 222 (1946), 847–849.
[27] O. Saeki, *Notes on the topology of folds*, J. Math. Soc. Japan Volume 44, Number 3 (1992), 551–566.
[28] O. Saeki, *Topology of special generic maps of manifolds into Euclidean spaces*, Topology Appl. 49 (1993), 265–293.
[29] O. Saeki, *Reeb spaces of smooth functions on manifolds*, International Mathematics Research Notices, maa301, https://doi.org/10.1093/imrn/maa301, arxiv:2006.01689.
[30] O. Saeki and K. Suzuoka, *Generic smooth maps with sphere fibers* J. Math. Soc. Japan Volume 57, Number 3 (2005), 881–902.
[31] D. Sakurai, O. Saeki, H. Carr, H Wu, T. Yamamoto, D. Duke and S. Takahashi, *Interactive Visualization for Singular Fibers of Functions* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Volume: 22, Issue: 1, Jan. 31 2016), 945–954.
[32] V. Sharko, *About Kronrod-Reeb graph of a function on a manifold*, Methods of Functional Analysis and Topology 12 (2006), 389–396.
[33] M. Shiota, *Thom's conjecture on triangulations of maps*, Topology 39 (2000), 383–399.
[34] N. Steenrod, *The topology of fibre bundles*, Princeton University Press (1951).
[35] 田村 一郎, 微分位相幾何学, 岩波オンデマンドブックス, 岩波書店 , 2015/7.
[36] 田村 一郎, トポロジー, 岩波オンデマンドブックス, 岩波書店 , 2015/8.
[37] R. Thom, *Les singularites des applications differentiables*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 6 (1955-56), 43–87.
[38] X. Wang *On the classification of certain* 1*-connected* 7*-manifolds and related problems*, arXiv:1810. 08474.
[39] H. Whitney, *On singularities of mappings of Euclidean spaces: I, mappings of the plane into the plane*, Ann. of Math. 62 (1955), 374–410.

Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University, 744 Motooka, Nishi-ku Fukuoka 819-0395, Japan, TEL (Office): +81-92-802-4402, FAX (Office): +81-92-802-4405,

E-mail address: n-kitazawa@imi.kyushu-u.ac.jp

Webpage: https://naokikitazawa.github.io/NaokiKitazawa.html

九州大学 IMI 共同利用・短期共同研究　公開講演会

高次元多様体の世界の幾何的構成的な理解と高次元データへの応用

日時：　　2021 年 7 月 12 日（月）13：00 ～ 13 日（火）13：00
場所：　　オンライン（Zoom）

7 月 12 日（月）
13：00-13：10 開始

13：15-14：00
北澤　直樹（九州大学マス・フォア・インダストリ研究所・学術研究員）
Morse 関数折り目写像と高次元閉可微分多様体の幾何的構成的扱い

14：15-15：00
佐伯　修（九州大学マス・フォア・インダストリ研究所・教授）
Quick Survey of Reeb Spaces in Topology and Visualization

15：15-16：00
櫻井　大督（九州大学情報基盤研究開発センター附属汎オミクス計測･計算科学センター･准教授）
Reeb グラフと Reeb 空間の応用

16：15-17：00
高橋　成雄（会津大学・教授）
放射性物質の沈着過程を調査するための地理空間多変量データの視覚的分析

7 月 13 日（火）
9：30-10：15
濱田　直希（K Lab 株式会社・研究員）
多目的最適化の解集合のモデリング

10：30-11：15
藤井　彬人（九州大学大学院システム情報科学府情報学専攻・修士 2 年）
押し出され時空間プリズムメッシュの効率的な三角形分割

11：30-13：00
自由講演

※研究実施期間：2021 年 7 月 12 日(月)～7 月 15 日(木)
7 月 13 日(火)14:00～7 月 15 日（木）まで非公開