

# 2022年度共同利用研究報告書

2022年08月31日

所属・職名 愛媛大学・データサイエンスセンター・准教授

石川 勲

		整理番号	2022a012	
1.研究計画題目	Besov空間におけるKoopman作用素の有界性の研究とその応用			
2.新規・継続	新規			
3.種別	一般研究			
4.種目	短期共同研究			
5.開催方法				
6.研究代表者	氏名	石川 勲		
	所属 部局名	愛媛大学・データサイエンスセンター	職 名	准教授
7.研究実施期間	2022年05月23日(月曜日)～2022年05月27日(金曜日)			
8.キーワード	Koopman作用素, 合成作用素, Besov空間			
9.参加者人数	15人			

## 10.本研究で得られた成果の概要

Koopman作用素とは、力学系の定まる空間において適切な関数空間を設定することによって、力学系を「引き戻し」という操作で線形作用素と見做したものである。この作用素は2000年代にMezicを始めとする研究者らによって物理現象のデータ解析的な観点からの応用が見出され、近年では物理に限らない幅広い科学分野での応用が知られている。ところが、その一方でその理論的には未解決な部分が多くある。特に、工学等への応用を見据えた関数空間論的な考察はまだ十分とは言えない現状がある。本研究では、関数空間としてBesov空間を採用し、関数空間論的な枠組みからKoopman作用素を考察した。Besov空間とは、偏微分方程式論や関数空間論で中心的な役割を担うユークリッド空間上の関数空間であり、関数の滑らかさや減衰の様子を精密に解析することができる。

本研究の成果は、力学系が適当な技術的条件を満たす時に、1次元Euclid空間（実直線）上のBesov空間におけるKoopman作用素の有界性とユークリッド空間上の力学系の関係性を明らかにした。特に、力学系が実直線上の同相写像である場合などが一つの重要な例である。本研究成果の成果については現在論文を執筆中であり、2022年度中に完成させて投稿できる予定である。また、力学系に課していた技術的な仮定を弱める研究や高次元への一般化について継続して研究を行なっている。本研究でKoopman作用素の応用例として重要な動的モード分解（DMD）についての考察も行った。Besov空間におけるWavelet基底の理論が援用できそうであるという示唆を得たため、継続して定期的に議論を行なっている。

2022年度九州大学 IMI 共同利用 一般研究-短期共同研究

# Besov 空間における Koopman 作用素の 有界性の研究とその応用

## 成果報告書

池田 正弘 (理化学研究所)      石川 勲\* (愛媛大学)      谷口 晃一 (東北大学)

August 31, 2022

## 1 活動の詳細

ここでは、共同利用研究の期間中 (5/23-5/27) における活動の詳細、及び、その活動期間前後における準備や事後の活動について報告する。

### 1.1 スケジュール

期間中のスケジュールは以下の通りである。公開プログラムは 24 日午後の「Koopman 作用素の数理ワークショップ」のみであり、それ以外は非公開としている。

#### 5月23日 (月)

14:00-17:00 研究討論

参加者：石川勲 (愛媛大学)・池田正弘 (理化学研究所)・谷口晃一 (東北大学)

#### 5月24日 (火)

10:00 - 12:00 研究討論

参加者：石川勲 (愛媛大学)・池田正弘 (理化学研究所)・谷口晃一 (東北大学)

14:00 - 17:00 Koopman 作用素の数理ワークショップ

- 14:00 - 14:40 講演 I

講演者：石川 勲 (愛媛大学)

タイトル：Quasi-Banach 空間における重み付き Koopman 作用素の有界性と力学系の安定性について

- 14:40 - 15:00 休憩・自由討論

- 15:00 - 15:40 講演 II

講演者：谷口晃一 (東北大学)

タイトル：Besov 空間における Koopman 作用素の有界性について

- 15:40-16:00 休憩・自由討論

---

\*代表研究者

- 16:00 – 16:40 講演 III  
講演者：橋本悠香 (NTT)  
タイトル：Koopman 作用素を用いた力学系の相互作用の推定
- 16:40 – 17:00 休憩・自由討論

## 5月25日(水)

10:00 – 12:00 研究討論

参加者：石川勲 (愛媛大学)・池田正弘 (理化学研究所)・谷口晃一 (東北大学)

14:00 – 16:00 研究交流会

参加者：石川勲 (愛媛大学)・池田正弘 (理化学研究所)・谷口晃一 (東北大学)・小西卓哉 (九州大学)・幡谷龍一郎 (東京大学)・園田翔 (理化学研究所)・橋本悠香 (NTT)・山崎陽平 (九州大学)

16:00 – 17:00 研究討論 (河原氏と研究打ち合わせ)

参加者：石川勲 (愛媛大学)・池田正弘 (理化学研究所)・谷口晃一 (東北大学)・河原吉伸 (九州大学)

## 5月26日(木)

10:00 – 12:00 研究討論

参加者：石川勲 (愛媛大学)・池田正弘 (理化学研究所)・谷口晃一 (東北大学)

14:00 – 17:00 研究討論

参加者：石川勲 (愛媛大学)・池田正弘 (理化学研究所)・谷口晃一 (東北大学)

## 5月27日(金)

10:00 – 12:00 研究討論

参加者：石川勲 (愛媛大学)・池田正弘 (理化学研究所)・谷口晃一 (東北大学)

## 1.2 参加人数について

研究討論は基本的に研究代表者、池田氏、谷口氏の3人で行い、25日のみ河原氏も交えて行った。公開プログラムでは全部で14名の参加があった。また、25日の研究交流会では参加者が8名であった。会期全体の延べ参加人数は32名となった。

## 1.3 採択から会合までの準備期間で行ったこと

Besov 空間における Koopman 作用素の研究は比較的歴史があり、様々な先行研究があった。本研究で行う予定だった higher order ケースはオープンな問題であったことはわかっていた。ただ、higher order でない場合の手法に今回の問題のヒントが隠されている可能性がある。そのため、採択から会合までにこれらの先行研究のサーベイや証明技法の精査を行い、会合で効率的に研究を進められるようにした。

## 1.4 会合中の研究討論について

研究討論では事前準備でサーベイした手法などを検討して、今回の主問題である higher order な場合の Besov 空間における Koopman 作用素の有界性と力学系の性質の関係性について集中的に議論を行った。この議論の結果、ある程度広いクラスの力学系に対して、Koopman 作用素が有界になるための必要十分条件を得た。詳細は2章を参照。また、九州大学の河原吉伸氏と工学への応用について議論した。Besov 空間による動的モード分解 (DMD) の理論解析につい

てどのような切り口があり得るのか話し合い、特に、Wavelet 基底を用いた手法について議論を行った。

## 1.5 公開プログラム「Koopman 作用素の数理ワークショップ」について

このワークショップは Koopman 作用素の数学的な側面に焦点を当てて最新の研究成果をいくつか紹介することを趣旨としたものである。研究代表者、及び、谷口氏による Koopman 作用素の数学的な性質についての研究成果の他、NTT の研究員である橋本氏によるネットワーク力学系の Koopman 作用素を用いた解析について講演が行われた。

## 1.6 研究交流会について

公開プログラム「Koopman 作用素の数理ワークショップ」の聴講者や九州大学関係者の中で、広い意味で本会合の関連しそうな研究を行う人が多くいたため、各人の最新の研究について紹介して議論する場を設けた。活発な議論が交わされ、非常に有益な研究交流の場となった。

## 1.7 会合後について

本会合中の成果は現在論文として執筆中であり、今年度中に完成する見込みである。完成した論文はプレプリントサーバー arXiv で公開し、適切な学術ジャーナルへの投稿を行う予定である。また、今回は 1 次元の状況しか考えていなかったが、工学への応用などを見据えると高次元への拡張が課題である。また、適用可能な力学系のクラスを広げることも重要な課題である。これらの 2 つの課題については、引き続き、研究代表者、池田氏、そして、谷口氏と 3 人で議論を継続している。また、Besov 空間を関数空間として用いた場合の DMD の解析も継続して議論を行なっている。

## 2 研究成果

ここでは研究成果の詳細について記述する。ここでは  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  として可測であるとする。この  $\varphi$  が Koopman 作用素 (定義は後述) を定める力学系である。今回には次の条件を仮定する：

- 非特異、すなわち、測度 0 集合の  $\varphi$  による逆像が再び測度 0 になる、
- 絶対連続、
- $\sup_{x \in \mathbb{R}} \#\varphi^{-1}(x) < \infty$ 。

まず、 $\mathbb{R}$  上の Besov 空間  $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$  の定義を述べる。Besov 空間には複数の同値な定義が存在するが、今回は以下の定義を採用する (やや限定された状況における定義であるが、今回の研究の目的には十分である。より一般的な定義については例えば [3] を参照)：

**Definition 2.1** (Besov 空間  $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$ ). 実数  $p, q, s \in \mathbb{R}$  について、 $0 < p, q \leq \infty$ ,  $s > \max(0, 1/p - 1)$  を仮定する。 $\mathbb{R}$  上の可測関数  $f$  で次のノルム

$$\|f\|_{B_{p,q}^s} := \|f\|_{L^p} + \left( \int_{|h| \leq 1} |h|^{-sq} \|\Delta_h^m f\|_{L^p}^q \frac{dh}{|h|} \right)^{\frac{1}{q}}$$

が有限となるものを完備化した関数空間である ( $q = \infty$  の場合は適切にノルムの定義を修正する)。ここで、 $m \in \mathbb{N}$  は  $m > s$  となる任意の自然数であり、さらに、 $\Delta_h^m$  は order  $m$  の差分作用素と呼ばれ、次のように帰納的に定義される：

$$\Delta_h^m f(x) := \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} \binom{m}{j} f(x + jh), \quad x, h \in \mathbb{R}.$$

ただし、 $\Delta_h^0$  は恒等作用素である。

上で定義した関数空間  $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$  において、 $\varphi$  に付随する **Koopman 作用素**  $C_\varphi : B_{p,q}^s(\mathbb{R}) \rightarrow B_{p,q}^s(\mathbb{R})$  とは  $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R})$  に対して、 $C_\varphi f := f \circ \varphi$  と定義される線形作用素である。 $\varphi$  は非特異であるためこの線形作用素は well-defined であることに注意する。

今回得られた成果は、Koopman 作用素  $C_\varphi$  が有界な線形作用素であるための必要十分条件を与えた、というものである。詳しくは以下の通りである：

**Theorem 2.2.** 実数  $p, q, s \in \mathbb{R}$  は  $1 < p \leq \infty$ ,  $0 < q \leq \infty$ ,  $s > 1 + 1/p$  を満たすとする。この時、Koopman 作用素  $C_\varphi$  が  $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$  で有界となるための必要十分条件は  $U(\varphi) < \infty$  かつ  $\varphi' \in M(B_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R}))$  となる場合である。ここで、

$$U(\varphi) := \sup_{|I|=1} |\varphi^{-1}(I)|$$

であり、 $M(B_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R}))$  は  $B_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})$  の pointwise multiplier、すなわち、 $\mathbb{R}$  上の可測関数  $f$  であって

$$\sup_{\|g\|_{B_{p,q}^s} \leq 1} \|fg\|_{B_{p,q}^s} < \infty.$$

となるもの全体の集合である。

$0 < s < 1$  の場合は複数の既存研究があり、例えば、Vodop'yanov [4], Bourdaud-Sickel [2], Bourdaud [1] らによって様々な必要条件や十分条件が得られている。本成果は彼らの成果を  $s > 1 + 1/p$  の場合に拡張したものである ( $1 \leq s \leq 1 + 1/p$  の場合は難しく、部分的な結果は知られているものの、まだオープンな問題である)。

## References

- [1] Gérard Bourdaud. Changes of variable in besov spaces. ii. *Forum Math.*, 12(5):545–563.
- [2] Gerard Bourdaud and Winfried Sickel. Changes of variable in besov spaces. *Math. Nachr.*, 198:19–39.
- [3] Hans Triebel. *Theory of function spaces*, volume 78 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel.
- [4] S. K. Vodop'yanov. Mappings of homogeneous groups and embeddings of function spaces. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 30(5):25–41, 215.

開催日：2022/08/08~2022/08/08

# 微分計算科学の理論・応用・展開 | 共2022a013

カテゴリー：イベント タグ： 若手研究 短期共同研究

## 開催概要

- 開催方法：九州大学 伊都キャンパスとZoomミーティングによるハイブリッド開催
- 開催場所：九州大学 伊都キャンパス ウエスト1号館 D棟 4階 IMIオーディトリウム (W1-D-413)
- 主要言語：日本語
- 主催：九州大学マス・フォア・インダストリ研究所
- 研究計画題目：超双対数に基づく高精度・高速微分計算理論の構築
- 研究代表者：井元 佑介（京都大学・高等研究院・特定助教）
- 研究実施期間：2022年8月8日（月）～ 2022年8月10日（木）
- 公開期間：2022年8月8日（月）
- 研究計画詳細：[https://joint1.imi.kyushu-u.ac.jp/research\\_chooses/view/2022a013](https://joint1.imi.kyushu-u.ac.jp/research_chooses/view/2022a013)

## プログラム

### 8月8日（月）

13:00-13:05

オープニング

13:05-14:05

井元 佑介（京都大学高等研究院）  
超双対数に基づく微分計算の理論・応用・展開

14:15-15:15 【招待講演】

松原 成志朗（名古屋大学大学院工学研究科機械システム工学専攻）  
共著者：山中 耀介（東北大学）、韓 露珂（東北大学）、寺田 賢二郎（東北大学）  
増分ポテンシャル法による非弾性固体材料の有限要素解析

15:50-16:50 【招待講演】

出口 翔大（九州大学工学府土木工学専攻）  
共著者：浅井 光輝（九州大学工学研究院社会基盤部門）  
自動微分を用いたニューラルネットワーク PINN による未知パラメータの逆解析

17:00-18:00 【招待講演】

久保田 光一（中央大学理工学部）  
アルゴリズム微分・自動微分

18:00-18:05

クロージング