

令和2年度<若手研究_再公募>共同利用研究報告書

2021年04月14日

九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所長 殿

所属・職名 京都大学大学院工学研究科建築学専攻・大学院生
早川 健太郎

下記の通り共同研究の報告をいたします。

記

		整理番号	20200029	
1. 研究計画題目	シェル理論・膜理論への微分幾何学からのアプローチとその建築曲面設計への応用			
2. 新規・継続	新規			
3. 種別	若手研究			
4. 種目	短期共同研究			
5. 研究代表者	氏名	早川 健太郎		
	所属 部局名	京都大学大学院工学研究科建築学専攻	職名	大学院生
6. 研究実施期間	2021年02月18日(木曜日)～2021年02月18日(木曜日)			
	2021年02月27日(土曜日)～2021年02月27日(土曜日)			
	2021年03月06日(土曜日)～2021年03月06日(土曜日)			
	2021年03月12日(金曜日)～2021年03月12日(金曜日)			
	2021年03月20日(土曜日)～2021年03月20日(土曜日)			
7. キーワード	建築構造, 釣合形状, 施工性, シェル理論, 膜理論, 有限要素, 線型Weingarten曲面, 可積分幾何, 離散微分幾何学, 幾何学的変分問題			
8. 参加者人数	28人			

9. 本研究で得られた成果の概要

建築のデザインや構造設計では、大空間を覆うシェル構造や膜構造の形状を、意匠性のみならず、力学的観点や幾何学的観点から導くのが望ましい。構造物の構成材料の力学特性を十分に生かすためには、曲げやせん断力が発生せず、面内膜応力で釣り合う形状が理想とされている。こうした曲面の幾何学的特性による決定方法は逆吊り下げ曲面や極小曲面など古典的な曲面クラスに限定されている。一方、数学的には、法線方向に一定の外力が作用するときに面内膜応力で釣り合う曲面クラスがRogers and Schiefにより示されている。しかし、この曲面の力学的性質を活用した建築での応用例は確認されておらず、その有用性を示す必要がある。こうした背景をふまえ、数学・建築双方の視点からシェル理論・膜理論を理解することで、釣合条件を満たす、あるいは力学的性能と施工性を両立する新たな曲面形状決定手法を構築し、建築設計に用いられる曲面クラスの拡張に寄与することを目的として本共同研究を計画した。

本共同研究の成果として、Rogers-Schief論文の数学・建築双方の視点からの理解と整理を行い、シェル・膜構造等の面内応力で釣り合う曲面構造の釣合式とGauss-Codazzi方程式を対として得られる曲面クラスの条件を確認した。また、建築曲面構造の設計への理論の応用可能性の検討を行い、釣合条件を満たす、または力学的性能と施工性を両立する形状決定手法の構築方法の検討を行った。さらに、面内応力で釣り合う曲面の一つとして離散曲面モデルに対する Discrete isothermic surfaceの構築方法を提案し、力の釣り合い条件を表す曲面(force surface)の構築と釣合状態にある曲面(form surface)への変換の検証を行い、極小曲面(Catenoid)に対する妥当性を確認した。

本共同研究で得られた曲面の例はRogers-Schief論文等で提示されている曲面クラスの一部であり、さらなる拡張が見込まれる。また、Rogers-Schief論文とgraphic staticsなどの既往研究との間に関連性が見出され、関連理論の統一的な整理の検討も今後の可能性として挙げられる。

IMI 共同利用・成果報告書

研究題目

シェル理論・膜理論への微分幾何学からのアプローチとその建築曲面設計への応用

研究代表者

早川 健太郎（大学院生，京都大学大学院工学研究科建築学専攻）

組織委員・参加者

軸丸 芳揮（学術研究員，九州大学マス・フォア・インダストリ研究所）

横須賀 洋平（准教授，鹿児島大学学術研究院理工学域工学系）

可香谷 隆（助教，九州大学マス・フォア・インダストリ研究所）

林 和希（大学院生，京都大学大学院工学研究科建築学専攻）

堺 雄亮（大学院生，京都大学大学院工学研究科建築学専攻）

研究実施期間

1: 2021/02/18 ~ 2021/02/18

2: 2021/02/27 ~ 2021/02/27

3: 2021/03/06 ~ 2021/03/06

4: 2021/03/12 ~ 2021/03/12

5: 2021/03/20 ~ 2021/03/20

研究背景・目的

建築のデザインや構造設計では，大空間を覆うシェル構造や膜構造の形状を，意匠性のみならず，力学的観点や幾何学的観点から導くのが望ましい。構造物の構成材料の力学特性を十分に生かすためには，曲げやせん断力が発生せず，面内膜応力で釣り合う形状が理想とされているものの，こうした曲面の幾何学的特性による決定方法は逆吊り下げ曲面や極小曲面など古典的な曲面クラスに限定されている。

数学的には，法線方向に一定の外力が作用するときに面内膜応力で釣合うためのシェル理論・膜理論の釣合式と曲面のガウス・コダッチ方程式を対として得られる曲面クラスは Schief and Konopelchenko [1]が提示した「O-surfaces」の特別な場合であることが Rogers and Schief [2]により示されている。しかし，この曲面の力学的性質を活用した建築での応用例は確認されておらず，その有用性を示す必要がある。

本研究では，数学・建築双方の視点からシェル理論・膜理論を理解することで，曲面の力学的性質と幾何学的性質を関連付ける基礎的な理論の構築と設計への応用可能性を検討する。これにより，釣合条件を満たす，あるいは力学的性能と施工性を両立する新たな曲面形状決定手法を構築し，建築設計に用いられる曲面クラスの拡張に寄与する。

研究概要・実施状況

シェル理論・膜理論の可積分系理論の視点での基本的な取り扱いに関する勉強会をオンラインで2/18~3/6にかけて週1日、計3日間公開形式で実施した。同時に共同研究参加者による非公開のディスカッションを実施し、数学・建築双方から将来的に参照しやすい形式のノートを作成して記号などの認識の共通化を図るとともに、建築設計に応用するうえで必要となる条件の整理を行った。

その後、シェル構造や膜構造の解析では一般に曲面を三角形や四角形要素で離散化することから、構築した理論を有限要素の枠組みで実装するため、Schief[3]による離散曲面の理論に基づく手法を検討した。釣合方程式を満たす曲面形状決定問題の簡易な実装を試み、具体例の構成と解の応力解析などの数学的に得られる解の実用性に関する検討を行った。

以上により得られた成果は、3/20にオンラインでの成果報告会として公開形式で発表した。また、論文やノートなどの形式で研究成果を今後出版することを検討している。

研究成果

Rogers-Schief論文（以下、RS論文）の数学・建築双方の視点からの理解と整理を行い、シェル・膜構造等の面内応力で釣り合う曲面構造の釣合式と Gauss-Codazzi 方程式を対として得られる曲面クラスの条件を確認した。RS論文に関する勉強会より、法線方向に単位面積当たり一定の荷重がかかり、面内せん断力が生じずに釣り合う曲面 X が存在する必要十分条件は X の Combescure 変換 \tilde{X} が存在し、 X と \tilde{X} が直交条件を満たすことであることを確認し、本共同研究では釣り合い曲面 X を form surface, 力の釣り合いを表す \tilde{X} を force surface とそれぞれ定義した。

form surface と force surface の関係は、トラス構造の釣り合い軸力を図的に求める手法で、建築分野で主に研究されてきた graphic statics [4]における form diagram と force diagram の関係と類似する部分があり、文献[3]でも RS 論文の理論と graphic statics の関連性に関する言及があることから、これらの関連性の考察も行った。graphic statics は主に2次元トラスを対象とする手法であるが、graphic statics を用いて3次元空間内の曲面の鉛直荷重（重力）下での圧縮力のみによる釣り合いを解析する手法として thrust network analysis (TNA) [5]が提案されている。RS 論文の理論と TNA で扱う対象を比較すると、表1のようにまとめることができる。

表1 Rogers-Schief論文と thrust network analysis の比較

	RS論文	TNA
座標系	曲率線座標	ユークリッド直交座標系
荷重方向	法線方向	鉛直方向
膜の釣り合い	Combescure 変換	graphic statics
第1,2式	(form surface — force surface)	(form diagram — force diagram)
膜の釣り合い	直交条件	鉛直方向の釣り合い
第3式		

特に、離散曲面における RS 論文の理論[3]と TNA は曲面の釣合式の図的な取り扱いに類似点が見られ、RS 論文では面内、TNA では水平方向の力の釣り合いがそれぞれ各面、各頂点で辺と平行な力のベクトルを並び替えると閉じる条件として表される。

TNA は曲面の圧縮力の分布や流れを可視化する手法であるとともに、force diagram を操作することで鉛直荷重に対して圧縮力のみで釣り合うさまざまな曲面形状を生成することができる[5]。これに着想を得て、離散曲面における RS 論文の理論にもとづき、force surface を操作することで、法線方向荷重に対してある張力場で釣り合うさまざまな曲面形状を得る手法の検討を行った。まず、文献[3]にもとづき構築した form surface である極小曲面 (Catenoid など)が図 1 に示すように実際に荷重を加えない状態で文献内で示されているように等張力で釣り合うこと、主応力が曲率線方向を向くことを建築分野における構造解析手法を用いて確認した。続いて、荷重が働かない場合に form surface の構築が可能な force surface が満たす条件の整理を行い、force surface から form surface を構築する手法の検討および簡易的な実装を行った。

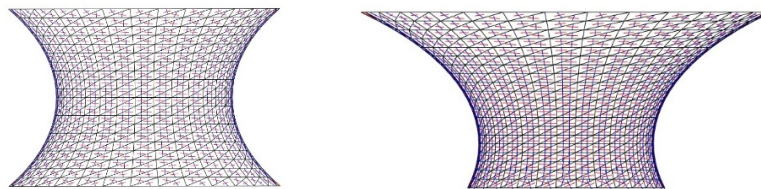


図 1 極小曲面の主応力分布

文献[3]の定理 3.2 より、離散曲率線 net で表された離散曲面が外力 0 かつ pure shear で釣り合うためには form surface および force surface が discrete isothermic surface であることが必要十分であり、このような force surface は cross ratio が-1 である circular net [5]として構築できる。このことから force surface の満たす条件式を確認し、曲面形状の操作の自由度と必要なパラメータおよびパラメータのとりうる範囲の整理を行った。以上の検討にもとづき、force surface を構成する離散曲率線 net を 3DCAD ソフトウェアの Rhinoceros およびそのプラグインである Grasshopper を用いて構築した。図 1 は force surface 構築の様子を示しており、図中緑の点を与えることで、force surface が一意に定まる。

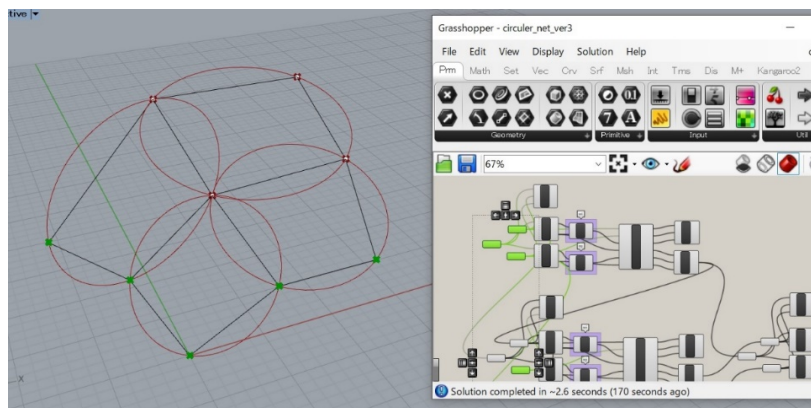


図 1 Rhinoceros + grasshopper による force surface の構築

force surface から form surface の構築は graphic statics と同様に曲面の辺を平行移動し、条件にしたがって並べ替えることで行う。このとき、force surface と form surface の対応する各四角形面の対角線が平行であるという条件から、拡大縮小を除き form surface は一意に定まる。ある一つの面に関して force surface から form surface を構築する過程は図2に示すとおりであり、各面について拡大縮小は任意に可能であることから、複数面からなる form surface も構成可能である。

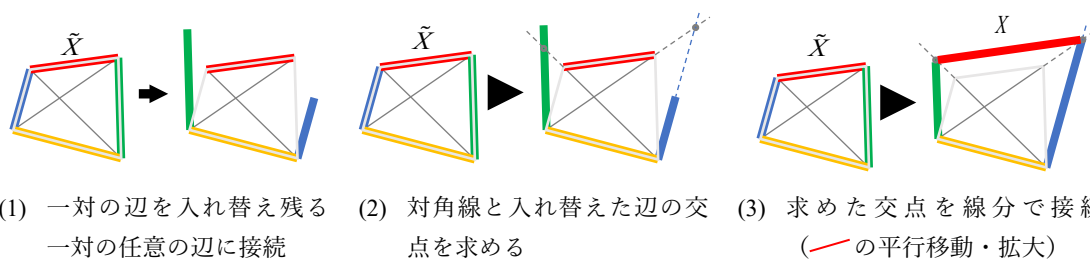


図2 form surface の1つの面の生成過程

以上に示す手法により force surface を構築し、form surface を force surface より構成した例を図3に示す。このとき、図3に示すように form surface も circular net になっていることを確認した。

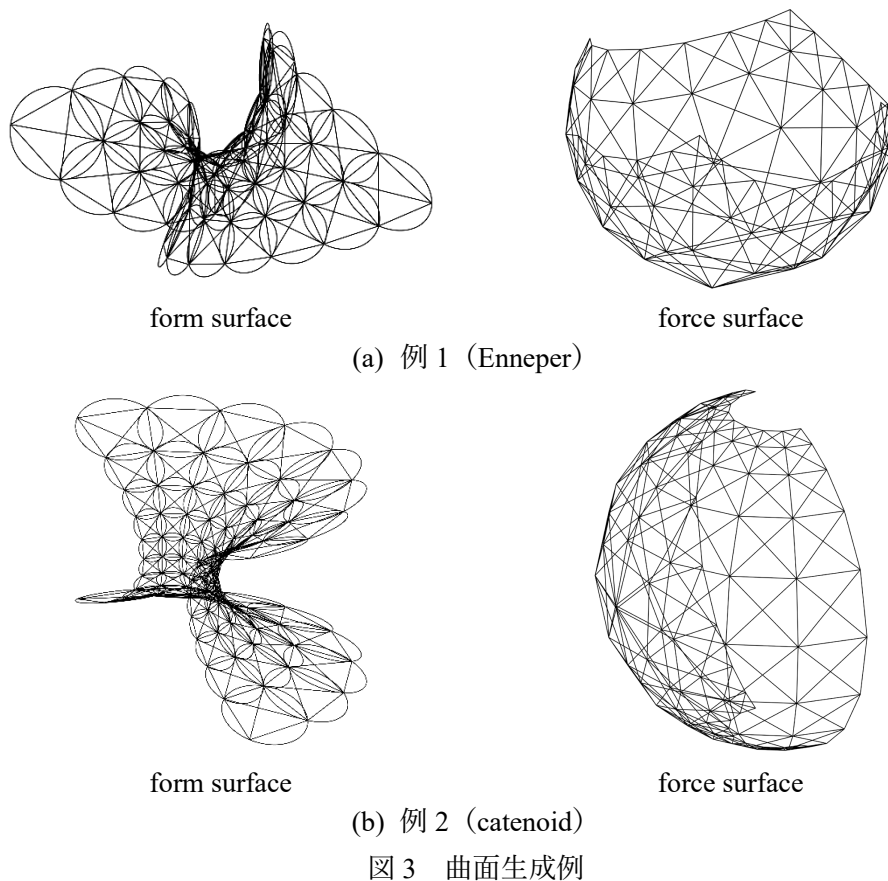


図3 曲面生成例

一方、離散曲率線 net に法線方向荷重が作用する場合には本共同研究期間内で曲面の満たす条件および構成方法を整理するまでには至らなかった。

以上の手法により得られる曲面は、建築のシェル構造や膜構造への応用可能性が高く、設計時の応力解析などにかかる計算コストの削減や、四角形平面で構成されることによる施工性の向上が見込まれる。

結論・考察

本共同研究では、Rogers-Schief 論文等で提示されている法線方向荷重に対して曲げやせん断力を生じることなく面内応力のみで釣り合う曲面の条件を数学・建築双方の視点から整理し、論文中の釣り合い曲面を form surface, 直交条件を満たす form surface の Combescure 変換を force surface と呼称した。また、建築分野において古くから研究されている graphic statics との類似点に着目し、thrust network analysis を用いた釣り合い曲面の生成手法に着想を得て、force surface を操作することでさまざまな form surface を構成する手法を提案した。本共同研究期間内では、外力が作用しない曲面に関して離散曲面の可積分系の文脈より曲面の構成法を構築し、曲面の例を示した。この手法により得られる曲面は力学的に優れているだけでなく、構造物の施工性も向上させ得るものである。

本共同研究で得られた曲面の例は Rogers-Schief 論文等で提示されている曲面クラスの一部であり、さらなる拡張が見込まれる。また、Rogers-Schief 論文と graphic statics に関連する理論の統一的な整理の検討も今後の可能性として挙げられる。

参考文献

- [1] W. K. Schief and B. G. Konopelchenko, On the unification of classical novel integrable surfaces. I. Differential geometry, Proc. R. Soc. A, Vol. 459, pp. 67-84, 2003.
- [2] C. Rogers, and W. K. Schief, On the equilibrium of shell membranes under normal loading. Hidden integrability, Proc. R. Soc. A, Vol. 459, pp. 2449-2462, 2003.
- [3] W. K. Schief, Integrable structure in discrete shell membrane theory, Proc. R. Soc. A, Vol. 470, paper No. 20130757, 2014.
- [4] J. C. Maxwell. XLV. On reciprocal figures and diagrams of forces, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, Vol. 27, No. 182, pp. 250-261, 1864
- [5] P. Block, Thrust network analysis, Exploring three-dimensional equilibrium, MIT, 2009, Ph. D. thesis
- [6] A. I. Bobenko and Y. B. Suris, Discrete differential geometry: Integrable structure, Graduate studies in mathematics Vol. 98, AMS, 2008

九州大学 IMI 共同利用・若手研究-短期共同研究 公開講演会

シェル理論・膜理論への微分幾何学からのアプローチと
その建築曲面設計への応用

Shell and membrane theory from the viewpoint of differential geometry
and its application to architectural surface design

日時：2021年2月18日（木）、2月27日（土）

3月06日（土）、3月20日（土）

場所：Zoomウェビナーによるオンライン開催



第1回：2/18（木）10:00 - 12:00

講演者：軸丸 芳揮（九州大学マス・フォア・インダストリ研究所）

講演内容：シェル理論・膜理論に向けた可積分幾何1：曲面の基本理論
とシェルの釣り合い方程式

第2回：2/27（土）10:00 - 12:00

講演者：軸丸 芳揮（九州大学マス・フォア・インダストリ研究所）

講演内容：シェル理論・膜理論に向けた可積分幾何2：膜の釣り合い方
程式と Rogers-Schief 理論

第3回：3/6（土）10:00 - 12:00

講演者：横須賀 洋平（鹿児島大学学術研究院理工学域工学系）

講演内容：埋め込み座標による非線形有限要素法 一膜要素一

第4回：3/12（金）全日非公開

第5回：3/20（土）15:00 - 17:00（予定）

講演者：早川 健太郎（京都大学大学院工学研究科建築学専攻）

講演内容：研究総括+ディスカッション：微分幾何学からのシェル理
論・膜理論の建築曲面設計への応用可能性

※研究実施期間：2021年2月18日（木）～3月20日（土）（全5回）

第4回：3月12日（木）は非公開