

## 2022年度共同利用研究報告書

2023年02月05日

所属・職名 東京理科大学理学部第一部応用数学科・助教

石原 侑樹

		整理番号	2022a005	
1.研究計画題目	量子消去の効率的なアルゴリズムの構築と産業課題解決への応用			
2.新規・継続	新規			
3.種別	若手・学生研究			
4.種目	短期共同研究			
5.開催方法	ハイブリッド開催			
6.研究代表者	氏名	石原 侑樹		
	所属 部局名	東京理科大学理学部第一部応用数 学科	職 名	助教
7.研究実施期間	2022年10月31日(月曜日)～2022年11月04日(金曜日)			
8.キーワード	量子消去、グレブナー基底、包括的グレブナー基底系、Cylindrical Algebraic Decomposition、準素イデアル分解、計算代数（数式処理）、実代数幾何学			
9.参加者人数	55人			

### 10.本研究で得られた成果の概要

量子消去（Quantifier Elimination、以下QE）は、代数等式および代数不等式で定義された問題を解くための強力な手法の1つであり、これまでMapleやMathematicaなどの計算代数ソフトウェア上で実装されてきている。本研究計画の動機としては、これまで多くの研究者によって研究され蓄積されてきたQEに関する知見や技術および最新の研究の動向を分析することで、関連する研究のブレイクスルーの萌芽を生むということが挙げられる。また、本研究の目的は、QEの効率的なプログラムを考案し、産業に登場する様々な問題を解決することである。その手法として例えば、既存のQEアルゴリズムに対して、準素イデアル分解などを活用する。

本研究においてはQEを産業課題の解決に応用するという目的で、様々な専門家を招き、多角的な共同研究を行った。非公開を含む対面の参加者の専門分野を大きく分けると、計算機代数、代数幾何学、特異点論、最適化理論、制御工学などが挙げられる。また、参加者50名以上も含めると、多種多様にわたる分野の専門家による研究交流が行われたと言える。本研究で得られた成果をまとめると、下記のことが挙げられる。

- (1)これまで蓄積されてきたQEの理論およびその応用の知見の共有
- (2)異分野の専門家同士の議論の交流による新しい問題解決方法の発見
- (3)産業課題の視点からの新しい問題の発見

まず(1)について、QEの基礎理論について非公開日初日（10/31）にセミナー形式で知識の共有を行った。その際には、QEの専門家から、実用されているソフトウェアの実装について解説をいただくなど、書籍や論文だけではなかなか知ることができない部分についても知見を共有することができた。

次に(2)について、冒頭に説明したように本共同研究においては様々な分野の研究者にご参加いただいた。今回、そのような異分野の専門家の間で研究交流があったことで、これまで気づけなかった視点、問題設定が議論を通して複数発見された。

最後に(3)について、今回の共同利用研究においては、企業にいる方や、過去に企業にいた方、産業と共同研究をしている人などにも参加していただいたことで、より課題解決に則した視点で議論を行うことができた。それにより、新しい数学的理論の構築の萌芽が見えることができた。

以上のように、今回の共同利用研究において多くの成果を得ることができたと思われる。今後の継続研究により、今回得られた問題意識や新しい発見が論文やソフトウェアの開発に活かされることが期待される。

## 限量子消去の効率的なアルゴリズムの構築と産業課題解決への応用

Construction of efficient algorithms for quantifier elimination  
and their application to solving industrial problems

# 成果報告書

### ◆ 実施概要

- ・ 組織委員  
石原侑樹（東京理科大学理学部第一部応用数学科・助教）[研究代表者]  
深作亮也（九州大学数理学研究院数学部門・助教）  
池松泰彦（九州大学マス・フォア・インダストリ研究所・助教）  
神戸祐太（三菱電機株式会社・リサーチアソシエイト）  
岩根秀直（リーディング・スキル・テスト株式会社・会社員）
- ・ 開催方法：現地開催とZoomミーティングによるハイブリッド開催
- ・ 場所：九州大学 伊都キャンパス ウエスト1号館 D棟 4階IMIオーディトリア（W1-D-413）
- ・ 種別・種目：若手・学生研究-短期共同研究
- ・ 研究実施期間：2022年10月31日（月）～2022年11月4日（金）  
うち  
公開期間：2022年11月2日(水)  
非公開期間：10月31日～11月1日、11月3日～11月4日
- ・ ウェブサイト：<https://joint.imi.kyushu-u.ac.jp/post-6716/>
- ・ 参加者数：55名

### ◆ 本研究計画の背景・動機・目的

限量子消去（Quantifier Elimination、以下QE）は、代数方程式および代数不等式で定義された問題を解くための強力な手法の1つであり、これまでMapleやMathematicaなどの計算代数ソフトウェア上で実装されてきている。QEは汎用性の高い技術であり、これまで数理最適化や制御系設計、数学自動解答システムなど多岐に渡り応用されている。QEを用いた手法の特徴として、記号計算（Symbolic Computation）を通して問題の背景にある数学的な構造を分析しやすいことがある。例えば、数値計算では取り扱いが難しい非線形や非凸な最適化問題に対しても、QEは適用可能

である。QEはその汎用性の反面、数値計算に比べ計算量が大きいという欠点がある。

本研究計画の動機としては、これまで多くの研究者によって研究され蓄積されてきたQEに関する知見や技術および最新の研究の動向を分析することで、関連する研究のブレイクスルーの萌芽を生むということが挙げられる。また、本研究の目的は、QEの効率的なプログラムを考案し、産業に登場する様々な問題を解決することである。その手法として例えば、既存のQEアルゴリズムに対して、準素イデアル分解などを活用する。

#### ◆ 本研究で得られた成果

本研究においてはQEを産業課題の解決に応用するという目的で、様々な専門家を招き、多角的な共同研究を行った。非公開を含む対面の参加者の専門分野を大きく分けると、計算機代数、代数幾何学、特異点論、最適化理論、制御工学などが挙げられる。また、参加者50名以上も含めると、多種多様にわたる分野の専門家による研究交流が行われたと言える。本研究で得られた成果をまとめると、下記のことことが挙げられる。

- (1)これまで蓄積されてきたQEの理論およびその応用の知見の共有
- (2)異分野の専門家同士の議論の交流による新しい問題解決方法の発見
- (3)産業課題の視点からの新しい問題の発見

その詳細を記載する。まず(1)について、QEの基礎理論について非公開日初日(10/31)にセミナー形式で知識の共有を行った。その際には、QEの専門家から、実用されているソフトウェアの実装について解説をいただくなど、書籍や論文だけではなかなか知ることができない部分についても知見を共有することができた。また、公開日においては佐藤洋祐先生に招待講演にいらしていただき、最近のCGS-QEの研究についてご講演いただいた。

次に(2)について、冒頭に説明したように本共同研究においては様々な分野の研究者にご参加いただいた。公開日においては、脇隼人先生に招待講演にいらしていただき、半正定値計画問題と厳密計算についてご講演いただいた。また、実特異点の分類アルゴリズムについて、寺本央先生に招待講演にてご講演をいただいた。非公開日においても、11月1日に最適化理論について専門家の方を招きご講演いただき、また、非公開日の11月4日には制御理論の専門家の方に来ていただきご講演をいただいた。さらには非公開日の11月3日においては、計算機代数の専門側から、QEや関連する

アルゴリズムの最新の研究について説明を行った。QEを含む計算機代数では、記号計算が主な研究対象であり、最適化理論や制御理論などに登場する数値的または解析的な手法とは大きく異なる。また、最適化理論や制御理論などにおいては、グレブナー基底や限量子消去などの厳密計算は主流ではない現状がある。今回、そのような異分野の専門家の中で研究交流があったことで、これまで気づかなかった視点、問題設定が議論を通して複数発見された。

最後に(3)について、現実の問題を解決する際には、数学的な理論とは別の条件が課せられることがある。特に純粋数学の研究においては現実の問題と乖離している場合があるため、数学的理論を現実の問題に適用するにはギャップが生じることがある。今回の共同利用研究においては、企業にいる方や、過去に企業にいた方、産業と共同研究をしている人などにも参加していただいたことで、より課題解決に則した視点で議論を行うことができた。それにより、新しい数学的理論の構築の萌芽が見えることができた。

以上のように、今回の共同利用研究において多くの成果を得ることができたと思われる。今後の継続研究により、今回得られた問題意識や新しい発見が論文やソフトウェアの開発に活かされることが期待される。

最後に、今回、研究計画の遂行にあたりご協力いただいた九州大学関係者の皆様に多大なる感謝を申し上げます。



開会式の様子



会場の様子

#### 非公開プログラム日程とテーマについて

10月31日：QEと包括的グレブナー基底系について

11月 1日：最適化理論とQEについて

11月 3日：準素分解、実代数幾何学、QEの実装について

11月 4日：制御理論と計算代数について

限量子消去の効率的なアルゴリズムの構築と産業課題解決への応用  
Construction of efficient algorithms for quantifier elimination and their application  
to solving industrial problems

11月2日 (水)

13:15-13:20

研究代表者挨拶

13:20-14:20

講演者：佐藤 洋祐（東京理科大学）

講演タイトル：Comprehensive Gröbner System(CGS)の簡易化と SageMath による実装

アブストラクト：QEの実装において論理式の簡易化は最重要課題の一つである。CGS-QEにおいても、岩根氏による論理式の簡易化を筆頭に、筆者や深作氏による様々な手法が考案されている。CGSそのものの簡易化も重要な課題であるが、非等式を用いた簡易化に関しては現在までところ、何の研究もされていない状況である。今回の講演では、非等式を用いたCGSの簡易化に関して、筆者によって最近得られた結果について、SageMathによる実装を用いてわかりやすく紹介する。

14:20-14:40

休憩

14:40-15:40

講演者：脇 隼人（九州大学）

講演タイトル：半正定値計画問題と厳密計算

アブストラクト：線形計画問題の拡張である半正定値計画問題は、組合せ最適化、非線形最適化、制御理論などで多くの応用がある。半正定値計画問題に対するアルゴリズムの研究の多くは大規模計算を目指した数値解法であるが、それほど規模の大きくない問題に対する厳密計算の研究も行われている。この講演では、私（と共同研究者）の研究成果を交えながらそのような厳密計算の必要性を説明したい。

15:40-16:00

休憩

16:00-17:00

講演者：寺本 央（関西大学）

講演タイトル：実特異点の分類アルゴリズム

アブストラクト：実特異点の分類アルゴリズムを紹介し、その中で実の限量子消去のアルゴリズムがどのように使えるのかを説明する。いくつかの具体例を示し、限量子消去の効率的なアルゴリズムへの期待を述べる。

※研究実施期間：2022年10月31日(月)～11月4日

※公開日：2022年11月2日(水)