

## 2023年度共同利用研究報告書

2023年07月24日

所属・職名 早稲田大学 理工学術院・教授

三枝崎 剛

	整理番号	2023a002
1.研究計画題目	離散構造における不変量の研究	
2.新規・継続	新規	
3.種別	一般研究	
4.種目	研究集会（Ⅱ）	
5.開催方法	対面開催	
6.研究代表者	氏名	三枝崎 剛
	所属 部局名	早稲田大学 理工学術院 <span style="float: right;">職名 教授</span>
7.研究実施期間	2023年06月22日(木曜日)～2023年06月22日(木曜日)	
8.キーワード	誤り訂正符号, 格子, 超平面配置, グラフ, マトロイド, 重み多項式, Whitney多項式, Tutte多項式, 特性準多項式	
9.参加者人数	16人	

### 10.本研究で得られた成果の概要

符号やグラフ、マトロイド、そして格子という離散構造がある。符号は情報伝達の効率化・高精度化を目的として導入された概念である。また、グラフはネットワーク構造を抽象化したものに他ならない。したがってこれらの離散構造の研究は応用上も重要なものである。またマトロイドや格子は符号やグラフをより抽象化したものであり、これらの研究も多くの応用数学者から注目を集めている。

符号理論の研究手法に、符号の情報を重さ多項式と呼ばれる多項式に置き換え、その多項式の数学的性質を通して符号を研究しようというものがある。この手法から符号理論は、応用数学のみならず、群論、整数論、数理論理との関係が明らかになり、純粋数学からも現在重要視されている。

この重さ多項式は、近年多くの概念へと一般化された。例えば小関道夫氏（山形大学名誉教授）によるヤコビ多項式、Christine Bachoc氏（Univ. Bordeaux）による調和重さ多項式などである。一方マトロイドにはコバウンダリー多項式、特性多項式という不変量がある。近年、特性準多項式と呼ばれる多項式族へと一般化されている。

本研究集会では、これらの最近の進展を、符号理論研究者、マトロイド研究者、グラフ理論研究者と共有することを目的とした。具体的には以下の講演が行われた：

○中島規博氏（名古屋工業大学）による、符号理論と超平面配置の多項式不変量の関係（重さ多項式とコバウンダリー多項式）の解説

○大浦学氏（金沢大学理工研究域）による、符号理論における重さ多項式の一般化であるヤコビ多項式の解説、そしてデザイン理論への応用

○阿部敏生氏（国立都城工業高等専門学校）による、多項式を用いたグラフ不変量であるk-選択可能の判定に関する解説

○東谷章弘氏（大阪大学大学院情報科学研究科）による、超平面配置の特性準多項式に定義されている2つの周期が一致しないという現象の解説

○長岡昇勇氏（近畿大学名誉教授）による、Niemeier 格子のテータ級数たちを、コクセター数を用いて表現する公式の解説

それぞれの講演に対して多くの質問やコメントがあり、有意義な研究集会となった。例えば中島規博氏の講演に関して「重さ多項式の準多項式類似は存在するか」、大浦学氏の講演に関して「ヤコビ多項式の斉次型、非斉次型の2種類の関係」、長岡昇勇氏の講演に関して「符号と格子の結果の相違点」に関する質問があった。研究集会への参加者は16名だった。

# 成果報告

## 離散構造における多項式不変量の研究

符号やグラフ、マトロイド、そして格子という離散構造がある。符号は情報伝達の効率化・高精度化を目的として導入された概念である。また、グラフはネットワーク構造を抽象化したものに他ならない。したがってこれらの離散構造の研究は応用上も重要なものである。またマトロイドや格子は符号やグラフをより抽象化したものであり、これらの研究も多くの応用数学者から注目を集めている。

符号理論の研究手法に、符号の情報を重さ多項式と呼ばれる多項式に置き換え、その多項式の数学的性質を通して符号を研究しようというものがある。この手法から符号理論は、応用数学のみならず、群論、整数論、数理物理との関係が明らかになり、純粋数学からも現在重要視されている。

この重さ多項式は、近年多くの概念へと一般化された。例えば小関道夫氏（山形大学名誉教授）によるヤコビ多項式、Christine Bachoc 氏（Univ. Bordeaux）による調和重さ多項式などである。一方マトロイドにはコバウンダリー多項式、特性多項式という不変量がある。近年、特性準多項式と呼ばれる多項式族へと一般化されている。

本研究集会では、これらの最近の進展を、符号理論研究者、マトロイド研究者、グラフ理論研究者と共有することを目的とした。

また、本共同研究に関連する研究として、中島規博氏（名古屋工業大学）、大浦学氏（金沢大学理工研究域）、阿部敏生氏（国立都城工業高等専門学校）、東谷章弘氏（大阪大学大学院情報科学研究科）、長岡昇勇氏（近畿大学名誉教授）を講演者として招き、符号理論、マトロイド理論、準多項式などに関する講演をしていただいた。それぞれの講演に対して多くの質問やコメントがあり、有意義な研究集会となった。研究集会への参加者は16名だった。

各講演者の講演の概要は以下の通りである。

- 中島規博氏（名古屋工業大学）

## ハミング重み多項式とコバウンダリー多項式の関係

符号理論におけるハミング重み多項式と、超平面配置のコバウンダリー多項式（あるいは Tutte 多項式）には、簡単な変換式が存在し、本質的に同じ多項式であることが知られている。中島氏の講演では、これらの関係性の解説が与えられ、具体的なコバウンダリー多項式の計算例が多数与えられた。また準多項式への一般化の説明があり、今後の研究方向の説明、他分野との発展の可能性の紹介があった。

- 10:40-11:40 大浦学氏（金沢大学理工研究域）

### 符号から得られる様々な多項式について

符号理論には小関道夫氏（山形大学名誉教授）の定義したヤコビ多項式が存在する。この多項式はモジュラー形式理論におけるヤコビ形式の類似として定義された。大浦氏の講演ではこの関係性の解説が与えられ、不変式論との関係の説明があった。その後ヤコビ多項式とデザイン理論との関係とともに、今後の超平面配置やマトロイド理論との発展の可能性が与えられた。

- 13:00-14:00 阿部敏生氏（国立都城工業高等専門学校）

### 群ラベル付きグラフの染色数の評価

彩色数を一般化した  $k$ -選択可能という概念の解説があった。この判定に、多項式を用いる手法の説明があり、他分野の多項式不変量との関係を示唆するものであった。

- 14:15-15:15 東谷章弘氏（大阪大学大学院情報科学研究科）

### 超平面配置の特性準多項式の周期崩壊

近年注目されている超平面配置の特性準多項式には、2つの周期が定義されている。この周期が一致しないという現象を与える系列の構成の解説があった。その証明は直接そのような超平面配置を与えるもの、多面体のエルハルト理論を用いるものの2通りが与えられ、2つの手法の比較が行われた。

- 15:30-16:30 長岡昇勇氏（近畿大学名誉教授）

Niemeier 格子のテータ級数について

Niemeier 格子のテータ級数たちを、コクセター数を用いて表現する公式の解説があった。種数 3 まで公式が存在するが、それ以上の種数では存在しないことも述べられた。これを応用して、ジーゲルモジュラー形式の合同式を得ることができる。また符号と重み多項式版の最近の研究に関する解説があった。

本研究集会の参加者から「多くの質問があり、また活発な議論ができた」とのコメントをいただいた。今後も符号理論とやグラフ、マトロイド、そして格子や周辺の研究について議論する場を設けて、本共同研究に関わる理論の発展を促したいと考えている。

研究代表者

三枝崎剛

開催日: 2023/06/22~2023/06/22

## 離散構造における多項式不変量の研究 | 共2023a002

カテゴリー: イベント タグ: 一般研究 研究集会II

### 開催概要

- 開催方法: 九州大学 伊都キャンパス (対面開催)
- 開催場所: 九州大学 伊都キャンパス ウェスト1号館 D棟 4階 IMIオーデトリウム (W1-D-413)
- 主要言語: 日本語
- 主催: 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所
- 種別・種目: 一般研究-研究集会 (II)
- 研究計画題目: 離散構造における多項式不変量の研究
- 研究代表者: 三枝崎 剛 (早稲田大学 理工学術院・教授)
- 研究実施期間: 2023年6月22日 (木)
- 公開期間: 2023年6月22日 (木)
- 研究計画詳細: [https://joint1.imi.kyushu-u.ac.jp/research\\_chooses/view/2023a002](https://joint1.imi.kyushu-u.ac.jp/research_chooses/view/2023a002)

### プログラム (対面のみ)

#### 6月22日 (木)

9:30-10:30

中島規博 (名古屋工業大学)

ハミング重み多項式とコバウンダリー多項式の関係

10:40-11:40

大浦学 (金沢大学理工研究域)

符号から得られる様々な多項式について

13:00-14:00

阿部敏生 (国立都城工業高等専門学校)

群ラベル付きグラフの染色数の評価

14:15-15:15

東谷章弘 (大阪大学大学院情報科学研究科)

超平面配置の特性準多項式の周期崩壊

15:30-16:30

長岡昇勇 (近畿大学名誉教授)

Niemeier格子のテータ級数について